

CATALUÑA · PAU 2017 · ORDINARIA

Matemáticas II

12 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) 1 punto

Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.

b) 1 punto

Resuelva el sistema para el caso $\lambda = 1$.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Sean las rectas de $\mathbb{R}^3$ $r : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ y $s : x + 1 = \frac{y-2}{2} = z - 1$.

a) 1 punto

Compruebe que son paralelas.

b) 1 punto

Calcule la ecuación vectorial del plano que las contiene.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Considere los planos $\pi_1 : 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2 : 2x + 3y + z = 5$.

a) 1 punto

Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 .

b) 1 punto

Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

en el que k es un parámetro real.

a) 1 punto

Discuta el sistema para los diferentes valores de k .

b) 1 punto

Resuelva el sistema para el caso $k = -2$.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$, en la que k es un parámetro real diferente de 0. Para los diferentes valores del parámetro k :

a) 1 punto

Calcule el dominio y las asíntotas de la función.

b) 1 punto

Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Responda a las cuestiones siguientes:

a) 1 punto

Compruebe que la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ es la recta $y = 4x - 4$ y calcule los puntos de intersección de esta recta con los ejes de coordenadas.

b) 1 punto

Calcule el área limitada por la curva del apartado anterior, la recta tangente en $x = 2$ y el eje de las abscisas.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Sabemos que el sistema de ecuaciones lineales siguiente tiene una única solución:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

a) 1 punto

Compruebe que $a \neq 0$.

b) 1 punto

Halle la solución del sistema en función del parámetro a .

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) 1 punto

Calcule las potencias A^2 , A^3 y A^6 .

b) 1 punto

Calcule la inversa de la matriz A^5 .

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$, con x e y números reales.

a) 1 punto

Compruebe que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x y de y .

b) 1 punto

Para $x = 1$ e $y = -1$, calcule M^{-1} .

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Sea $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada d'un sistema de ecuaciones lineales.

a) 1 punto

Discuta el sistema según los valores del parámetro a , e interprete el resultado geoméricamente.

b) 1 punto

Para $a = 1$ halle la forma paramétrica del plano solución y dé un punto y dos vectores directores de este plano.

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Considere un cono de 120 cm^3 de volumen que tiene una altura h , un radio de la base x y una arista a , como el de la figura siguiente:

a) 1 punto

Compruebe que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$.

b) 1 punto

Calcule la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima.

Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

El croquis de abajo representa la pared de una buhardilla con el techo inclinado, en la cual se quiere construir un armario rectangular como el de la zona sombreada.

a) 1 punto

Exprese el área del rectángulo en función de la longitud x del segmento AB .

b) 1 punto

Determine las dimensiones del rectángulo si queremos que tenga una superficie máxima y calcule esta superficie máxima.

Tu Profe al Rescate