

Modelo 5 de 2000

Se trabajan integrales, estudio de funciones, sistemas, simetrías, optimización y matrices.

Opción A - Ejercicio 1

Integramos por partes o usamos una primitiva obtenida aplicando dos veces la regla del producto inversa:

$$\int (x^2 + 5)e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 7) + C,$$

pues la derivada de $-e^{-x}(x^2 + 2x + 7)$ es $(x^2 + 5)e^{-x}$. Aplicando Barrow:

$$\int_{-1}^3 (x^2 + 5)e^{-x} dx = [-e^{-x}(x^2 + 2x + 7)]_{-1}^3 = \boxed{6e - \frac{22}{e^3}}.$$

Opción A - Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, porque el denominador no puede anularse. Dividiendo:

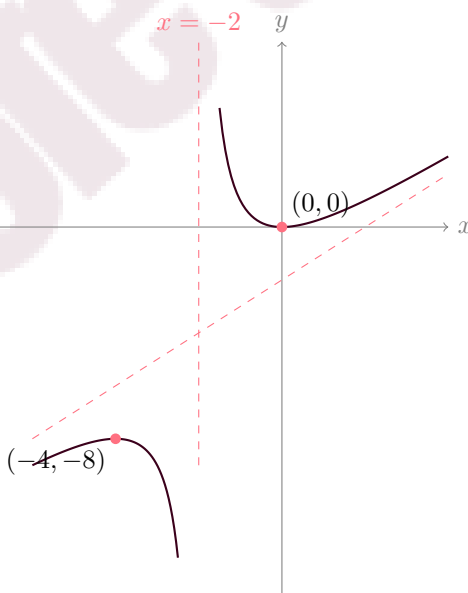
$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}.$$

Así, $x = -2$ es asíntota vertical ($f \rightarrow -\infty$ por la izquierda y $f \rightarrow +\infty$ por la derecha) y $y = x - 2$ es asíntota oblicua, ya que $f(x) - (x - 2) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

La derivada es

$$f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

Los puntos que separan los intervalos son $x = -4, -2, 0$; -2 se incluye porque no pertenece al dominio. El denominador es positivo, así que el signo viene dado por $x(x+4)$: $f' > 0$ en $(-\infty, -4)$ y $(0, \infty)$, mientras que $f' < 0$ en $(-4, -2)$ y $(-2, 0)$. Por tanto, hay un máximo local en $(-4, -8)$ y un mínimo local en $(0, 0)$. La gráfica tiene las dos asíntotas anteriores y pasa por esos extremos.



Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes del sistema homogéneo es

$$A_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_{\lambda}^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A_{\lambda} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Si $\lambda \neq 1, -2$, el determinante es distinto de cero; el sistema es SCD y su única solución es $(0, 0, 0)$. Para $\lambda = -2$, el rango es 2 (el menor de las dos primeras filas y columnas vale -3) y el vector $(1, 1, 1)$ anula las tres ecuaciones, por lo que $\text{rg}(A_{-2}) = \text{rg}(A_{-2}^*) = 2 < 3$ y

$$(x, y, z) = t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda = 1$, las tres ecuaciones coinciden con $x + y + z = 0$. En este caso los rangos de la matriz y de la ampliada son 1, menor que 3, así que el sistema es SCI:

$$(x, y, z) = (s, t, -s - t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

El vector normal del plano es $\vec{n} = (3, 2, 1)$. La proyección ortogonal H de $P = (1, 2, -2)$ sobre el plano se obtiene con

$$H = P - \frac{3(1) + 2(2) - 2 - 7}{3^2 + 2^2 + 1^2} \vec{n} = P + \frac{1}{7} (3, 2, 1) = \left(\frac{10}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{13}{7} \right).$$

La reflexión es $P' = 2H - P$, por lo que

$$P' = \left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{12}{7} \right).$$

Opción B - Ejercicio 1

La velocidad está definida en el intervalo cerrado $[2, 6]$, así que comparamos los extremos y los puntos críticos interiores. Derivando:

$$v'(t) = 3t^2 - 30t + 72 = 3(t - 4)(t - 6).$$

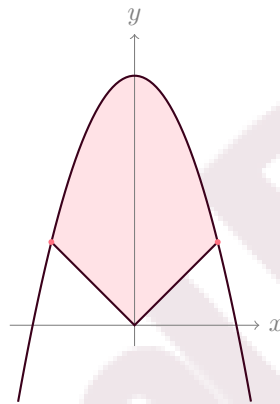
El único crítico interior es $t = 4$. La función crece en $(2, 4)$ y decrece en $(4, 6)$; además, evaluamos los extremos:

$$v(2) = 100, \quad v(4) = 120, \quad v(6) = 116.$$

Por tanto, la velocidad máxima, 120, se alcanza a las $\boxed{16:00}$; la mínima, 100, a las $\boxed{14:00}$. **Opción B - Ejercicio 2**

Los cortes de $f(x) = 6 - x^2$ y $g(x) = |x|$ se hallan por separado a cada lado de 0. Para $x < 0$, $6 - x^2 = -x$ da $x = -2$; para $x \geq 0$, $6 - x^2 = x$ da $x = 2$. En $[-2, 2]$, la parábola está por encima de $|x|$ (por ejemplo, en $x = 0$, sus valores son 6 y 0). Por simetría, el área es

$$S = 2 \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = 2 \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \boxed{\frac{44}{3}}.$$



Opción B - Ejercicio 3

La matriz A es invertible porque $\det A = -1$. Partimos de $A^2X = 2B$ y multiplicamos por $(A^2)^{-1}$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = (A^2)^{-1}(2B) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Si el punto del plano más próximo al origen es $Q = (-1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{OQ} = (-1, 2, 1)$ es normal al plano. Usando que el plano pasa por Q :

$$(-1, 2, 1) \cdot ((x, y, z) - (-1, 2, 1)) = 0.$$

Al desarrollar, la ecuación general buscada es

$$\boxed{-x + 2y + z - 6 = 0}.$$