

Convocatoria ordinaria de 2020

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

El dominio excluye $x = \pm 1$. Simplificamos $f(x) = (x-3)/(x-1) = 1 - 2/(x-1)$, manteniendo la exclusión $x = -1$ como hueco. En $x = -1$ la discontinuidad es evitable; en $x = 1$ el cociente diverge y hay asíntota vertical. Como $f(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, la asíntota horizontal es $y = 1$ y no hay oblicua.

En el dominio, $f'(x) = 2/(x-1)^2 > 0$. Por tanto, crece en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$; no decrece en ningún intervalo.

Ejercicio 2

En $[0, a]$, $xe^{3x} \geq 0$, así que el área es la integral directa. Una primitiva es $e^{3x}(x/3 - 1/9)$:

$$\frac{1}{9} = \int_0^a xe^{3x} dx = \frac{e^{3a}(3a-1)+1}{9}.$$

Como $e^{3a} > 0$, la igualdad exige $3a-1=0$. La condición $a > 0$ se cumple y $a = 1/3$.

Ejercicio 3

Calculamos

$$\det A = -(m-1)(2m+5).$$

Así, A es invertible salvo para $m = 1$ y $m = -5/2$. En esos valores el rango es 2 (por ejemplo, el menor superior izquierdo vale 1). Para $m = 2$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/9 & -5/9 & 7/9 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Como $(2020A)^{-1} = A^{-1}/2020$, resulta

$$(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020} \begin{pmatrix} -5/9 & -5/9 & 7/9 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4

Los directores son $\vec{u} = (1, 1, a)$ para r y $\vec{v} = (-a, -1, 2)$ para s . Igualando puntos genéricos, la tercera coordenada da $(a+2)t = 0$, y las otras dos determinan los casos de intersección. Si $a = -2$, se obtiene $t = 4/3$ y $u = -1/3$, así que las rectas se cortan en $(7/3, 10/3, -5/3)$. Si $a \neq -2$, debe ser $t = 0$, y la primera coordenada obliga a $a = 2$; entonces $u = 1$ y se cortan en $(1, 2, 1)$. En los demás casos no se cortan. Sus directores nunca son proporcionales, de modo que para los restantes valores son alabeadas.

Para $a = 2$, el producto vectorial de los directores es $(1, 1, 2) \times (-2, -1, 2) = (4, -6, 1)$. La recta perpendicular a ambas por el punto de corte se escribe

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(4, -6, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5

En $[0, 2\pi]$, $f(x) = \sin x / (2 - \cos x)$ tiene denominador positivo. Derivando,

$$f'(x) = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}.$$

Los puntos críticos son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. El signo de f' muestra un máximo en $\pi/3$ y un mínimo en $5\pi/3$; al comparar también con los extremos del intervalo, se obtiene $f_{\max} = 1/\sqrt{3}$ y $f_{\min} = -1/\sqrt{3}$.

En $x = \pi/3$, la tangente es horizontal, de ecuación $y = 1/\sqrt{3}$. La normal es vertical: $x = \pi/3$.

Ejercicio 6

Con $u = x - 2$, el integrando se reescribe como $3 + 12/u + 16/u^2$. Por tanto,

$$\int \frac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2} dx = 3x + 12 \ln |x - 2| - \frac{16}{x - 2} + C.$$

Para que la primitiva pase por $(3, 5)$, sustituimos $x = 3$: $3 - 16 + C = 5$, de donde $C = 18$. Así,

$$F(x) = 3x + 12 \ln |x - 2| - \frac{16}{x - 2} + 18.$$

Ejercicio 7

En la matriz de coeficientes, la tercera fila es la primera más tres veces la segunda. Para que el sistema sea compatible, los términos independientes deben satisfacer la misma relación: $3a = a + 3(2a)$, lo que exige $a = 0$. Si $a \neq 0$, $\text{rg } A = 2 < \text{rg } A^* = 3$ y es SI. Si $a = 0$, ambos rangos son $2 < 3$, así que es SCI.

Con $a = 0$, las ecuaciones independientes dan $y = 0$ y $x + z = 0$. Para que $y + z = 4$, tomamos $z = 4$, de donde $x = -4$. Una solución es $(-4, 0, 4)$.

Ejercicio 8

La recta, intersección de planos con normales $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, -3)$, tiene vector director $(-3, 3, 1)$. Un plano perpendicular a la recta tiene ese vector como normal. Al pasar por $A = (1, -2, 0)$:

$$-3x + 3y + z + 9 = 0.$$

Para el plano que contiene a r y pasa por A , observamos que A pertenece al plano $y - 3z + 2 = 0$, que también contiene a r . Por tanto, el plano pedido es

$$y - 3z + 2 = 0.$$