Lista de Exercícios: Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG)

Lumen Edu

Exercícios Fáceis

1.

Dada a PA $3, 7, 11, 15, \ldots$, determine o $10^{\underline{o}}$ termo.

2.

Dada a PG $2, 6, 18, 54, \ldots$, encontre o $6^{\underline{o}}$ termo.

3.

Calcule a soma dos 5 primeiros termos da PA $4, 8, 12, 16, \ldots$.

4.

Determine o valor de a_1 e r de uma PA cujo $3^{\underline{o}}$ termo é 12 e o $6^{\underline{o}}$ termo é 24.

5.

Encontre a soma dos 4 primeiros termos da PG $5, 10, 20, 40, \ldots$.
—

Exercícios Médios

1.

Encontre o número de termos de uma PA cuja soma é 300, sendo o primeiro termo 5 e a razão 3.

2.

Determine a soma dos 6 primeiros termos de uma PG com $a_1 = 3$ e $q = 2$.

3.

Em uma PA, o $7^{\underline{o}}$ termo é 35 e o $10^{\underline{o}}$ termo é 50. Encontre o primeiro termo e a razão.

4.

Uma empresa investiu R$ 1.000,00 no primeiro mês, R$ 1.200,00 no segundo e assim por diante, em uma PA. Calcule o total investido ao final de 12 meses.

5.

Determine a soma dos 7 primeiros termos da PG $4, 12, 36, 108, \ldots$.

—

Exercícios Difíceis

1.

Determine o valor de n para que a soma dos n primeiros termos de uma PA, com $a_1 = 2$ e $r = 5$, seja igual a 260.

2.

Encontre a soma dos primeiros 20 termos da PG $3, 6, 12, \ldots$.

3.

Calcule o 15º termo de uma PA cuja soma dos 12 primeiros termos é 234 e a razão é 3.

4.

Para uma PG de razão $q = 1/2$, determine a soma dos primeiros 10 termos da sequência $16, 8, 4, 2, \ldots$.

5.

Em uma PA de 10 termos, o primeiro termo é 3 e o último é 30. Qual é a soma dos 10 termos?

—

Resoluções

Exercícios Fáceis

1.

Dada a PA $3, 7, 11, 15, \ldots$, determine o 10º termo.

Solução: A fórmula do termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n-1)r$, onde $r = 4$ (diferença entre os termos). Substituindo na fórmula:

$$a_{10} = 3 + (10-1) \cdot 4 = 3 + 36 = 39$$

—

2.

Dada a PG $2, 6, 18, 54, \ldots$, encontre o 6º termo.

Solução: A fórmula do termo geral de uma PG é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde $q = 3$. Substituindo na fórmula:

$$a_6 = 2 \cdot 3^{6-1} = 2 \cdot 243 = 486$$

—

3.

Calcule a soma dos 5 primeiros termos da PA $4, 8, 12, 16, \ldots$.

Solução: A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Com $n = 5$, $a_1 = 4$, e $a_5 = 20$:

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot (4 + 20) = \frac{5}{2} \cdot 24 = 60$$

—

4.

Determine o valor de a_1 e r de uma PA cujo 3º termo é 12 e o 6º termo é 24.

Solução: Sabemos que $a_n = a_1 + (n-1)r$. Para $a_3 = 12$:

$$12 = a_1 + 2r$$

Para $a_6 = 24$:

$$24 = a_1 + 5r$$

Subtraindo as duas equações:

$$(24 - 12) = (a_1 + 5r) - (a_1 + 2r) \quad \Rightarrow \quad 12 = 3r \quad \Rightarrow \quad r = 4$$

Substituindo $r = 4$ na primeira equação:

$$12 = a_1 + 8 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 4$$

—

5.

Encontre a soma dos 4 primeiros termos da PG $5, 10, 20, 40, \ldots$.

Solução: A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{com } q = 2$$

Substituindo $a_1 = 5$, $n = 4$:

$$S_4 = \frac{5 \cdot (2^4 - 1)}{2 - 1} = 5 \cdot 15 = 75$$

—

Exercícios Médios

1.

Encontre o número de termos de uma PA cuja soma é 300, sendo o primeiro termo 5 e a razão 3.

Solução: A soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Sabemos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2$$

Substituindo na fórmula da soma:

$$300 = \frac{n}{2} \cdot (5 + 3n + 2) = \frac{n}{2} \cdot (3n + 7)$$

Multiplicando ambos os lados por 2:

$$600 = n \cdot (3n + 7)$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$3n^2 + 7n - 600 = 0$$

Usando Bhaskara:

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 7200}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{7249}}{6}$$

Aproximando, temos $n = 14$ (número de termos).

—

2.

Determine a soma dos 6 primeiros termos de uma PG com $a_1 = 3$ e $q = 2$.

Solução: A soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo $a_1 = 3$, $q = 2$, e $n = 6$:

$$S_6 = \frac{3 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 63 = 189$$

—

3.

Em uma PA, o 7º termo é 35 e o 10º termo é 50. Encontre o primeiro termo e a razão.

Solução: Sabemos que:

$$a_7 = a_1 + 6r = 35$$

$$a_{10} = a_1 + 9r = 50$$

Subtraindo as equações:

$$50 - 35 = (a_1 + 9r) - (a_1 + 6r) \quad \Rightarrow \quad 15 = 3r \quad \Rightarrow \quad r = 5$$

Substituindo na primeira equação:

$$35 = a_1 + 30 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 5$$

—

4.

Uma empresa investiu R$ 1.000,00 no primeiro mês, R$ 1.200,00 no segundo e assim por diante, em uma PA. Calcule o total investido ao final de 12 meses.

Solução: A PA tem $a_1 = 1000$, $r = 200$, e $n = 12$. O último termo a_{12} é:

$$a_{12} = 1000 + (12 - 1) \cdot 200 = 1000 + 2200 = 3200$$

A soma dos 12 termos é:

$$S_{12} = \frac{12}{2} \cdot (1000 + 3200) = 6 \cdot 4200 = 25.200$$

—

5.

Determine a soma dos 7 primeiros termos da PG $4, 12, 36, 108, \ldots$.

Solução: A soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Com $a_1 = 4$, $q = 3$, e $n = 7$:

$$S_7 = \frac{4 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{4 \cdot (2187 - 1)}{2} = \frac{4 \cdot 2186}{2} = 4372$$

—

Exercícios Difíceis

1.

Determine o valor de n para que a soma dos n primeiros termos de uma PA, com $a_1 = 2$ e $r = 5$, seja igual a 260.

Solução: A soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)r)$$

Substituindo os valores:

$$260 = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 5)$$

Simplificando:

$$260 = \frac{n}{2} \cdot (4 + 5n - 5) = \frac{n}{2} \cdot (5n - 1)$$

Multiplicando ambos os lados por 2:

$$520 = n(5n - 1)$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$5n^2 - n - 520 = 0$$

Aplicando Bhaskara:

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-520)}}{2 \cdot 5}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 10400}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{10401}}{10}$$

Portanto, $n = 10$.

—

2.

Encontre a soma dos primeiros 20 termos da PG $3, 6, 12, \ldots$.

Solução: A soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo $a_1 = 3$, $q = 2$, e $n = 20$:

$$S_{20} = \frac{3 \cdot (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (1048576 - 1) = 3 \cdot 1048575 = 3145725$$

—

3.

Calcule o 15º termo de uma PA cuja soma dos 12 primeiros termos é 234 e a razão é 3.

Solução: Sabemos que a soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)r)$$

Para $S_{12} = 234$, $r = 3$, temos:

$$234 = \frac{12}{2} \cdot (2a_1 + 11 \cdot 3) \quad \Rightarrow \quad 234 = 6 \cdot (2a_1 + 33)$$

$$234 = 12a_1 + 198 \quad \Rightarrow \quad 12a_1 = 36 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3$$

O 15º termo é dado por:

$$a_{15} = a_1 + 14r = 3 + 14 \cdot 3 = 3 + 42 = 45$$

—

4.

Para uma PG de razão $q = 1/2$, determine a soma dos primeiros 10 termos da sequência $16, 8, 4, 2, \ldots$.

Solução: A soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo $a_1 = 16$, $q = 1/2$, e $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{16 \cdot ((1/2)^{10} - 1)}{(1/2) - 1}$$

Calculando:

$$S_{10} = \frac{16 \cdot \left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{16 \cdot \frac{-1023}{1024}}{-\frac{1}{2}} = \frac{16 \cdot 1023}{1024} \cdot 2 = \frac{32736}{1024} = 32$$

—

5.

Em uma PA de 10 termos, o primeiro termo é 3 e o último é 30. Qual é a soma dos 10 termos?

Solução: A soma dos n termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Com $n = 10$, $a_1 = 3$, e $a_{10} = 30$:

$$S_{10} = \frac{10}{2} \cdot (3 + 30) = 5 \cdot 33 = 165$$