

El examen propone dos opciones y se debe elegir una. Para que esta resolución permita repasar todos los contenidos, desarrollamos los cuatro ejercicios de ambas opciones.

Opción A - Ejercicio 1

La puerta está formada por un rectángulo de base x y altura h , coronado por un semicírculo cuyo diámetro también mide x . Por tanto, su radio es $r = x/2$. El área fija de 16 m^2 nos permite expresar h en función de x :

$$xh + \frac{\pi r^2}{2} = 16 \implies xh + \frac{\pi x^2}{8} = 16 \implies h = \frac{16}{x} - \frac{\pi x}{8}.$$

El perímetro exterior incluye la base, los dos lados verticales y el arco semicircular. La longitud de este arco es $\pi r = \pi x/2$. Así,

$$P(x) = x + 2h + \frac{\pi x}{2} = \frac{32}{x} + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x.$$

Como $x > 0$ y $h \geq 0$, el dominio físico es $0 < x \leq \sqrt{128/\pi}$.

Para minimizar el perímetro buscamos los puntos críticos de P :

$$P'(x) = -\frac{32}{x^2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 0 \implies x^2 = \frac{128}{4 + \pi}.$$

La segunda derivada es $P''(x) = 64/x^3 > 0$ para $x > 0$, luego P es estrictamente convexa y el punto crítico da un mínimo. Además, $\sqrt{128/(4 + \pi)} < \sqrt{128/\pi}$, así que cumple la restricción de altura.

$$x = \sqrt{\frac{128}{4 + \pi}} \text{ m}$$

La base que hace mínimo el perímetro es, por tanto, $\sqrt{128/(4 + \pi)}$ metros.

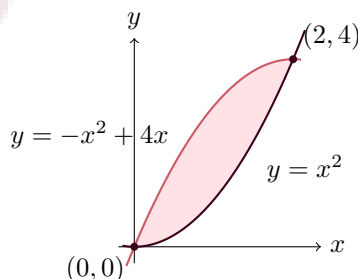
Opción A - Ejercicio 2

Las curvas son $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$. Para encontrar los extremos de la región igualamos sus ordenadas:

$$x^2 = -x^2 + 4x \implies 2x(x - 2) = 0,$$

de donde $x = 0$ o $x = 2$. Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(2, 4)$. En $0 < x < 2$, $(-x^2 + 4x) - x^2 = 2x(2 - x) > 0$, por lo que la parábola $y = -x^2 + 4x$ queda por encima de $y = x^2$.

a) El esbozo muestra ambas parábolas, los puntos de corte y la región comprendida entre ellas:



b) El área se obtiene integrando la función superior menos la inferior entre las abscisas de corte:

$$A = \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - x^2] dx.$$

c) Calculamos la integral:

$$A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

El recinto tiene área $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas.

Opción A - Ejercicio 3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Una matriz cuadrada no tiene inversa exactamente cuando su determinante es cero. Por tanto, calculamos el determinante de $A + \lambda I$:

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix},$$

$$\det(A + \lambda I) = (\lambda - 2)((\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Igualando a cero, la matriz es singular para

$$\lambda \in \{-2, 2, 3\}.$$

b) La ecuación $AX = -3X$ equivale a $(A + 3I)X = 0$. Es un sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x - 2y = 0, \quad z = 0.$$

Así, las soluciones son $X = (2t, t, 0)$, con $t \in \mathbb{R}$. Para imponer $x = 1$, tomamos $2t = 1$, es decir, $t = 1/2$. Una solución que cumple la condición es

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r pasa por $Q = (1, -2, 0)$ y tiene vector director $\vec{v} = (3, 0, 1)$. Para construir el plano que contiene a r y a $P = (1, -1, 0)$, usamos además el vector $\overrightarrow{QP} = P - Q = (0, 1, 0)$. Un vector normal al plano es perpendicular a ambos:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{QP} = (3, 0, 1) \times (0, 1, 0) = (-1, 0, 3).$$

Usando el punto Q , la ecuación del plano es

$$-(x - 1) + 3z = 0 \implies x - 3z - 1 = 0.$$

Para reflejar P respecto de r , primero hallamos su proyección ortogonal H sobre la recta. Si $H = Q + t\vec{v}$, entonces

$$t = \frac{(P - Q) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{(0, 1, 0) \cdot (3, 0, 1)}{3^2 + 1^2} = 0.$$

Así, $H = Q$. El punto simétrico P' cumple que H es el punto medio de PP' , luego

$$P' = 2H - P = 2(1, -2, 0) - (1, -1, 0) = (1, -3, 0).$$

Opción B - Ejercicio 1

La función racional $f(x) = x^2/(x - 1)$ tiene dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La división de polinomios da

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

Al acercarnos a $x = 1$, el numerador original tiende a 1 y el denominador cambia de signo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical. Para estudiar las asíntotas en el infinito, la expresión anterior muestra que

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = 1.$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$. No hay asíntota horizontal, pues $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y a $-\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

El signo de la derivada determina el crecimiento:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

El denominador es positivo en el dominio; dividimos la recta en los puntos críticos 0, 2 y en el punto excluido

1. Comprobamos el signo con un valor de prueba en cada intervalo:

Intervalo	Prueba de $f'(x)$	Signo
$(-\infty, 0)$	$f'(-1) = 3/4$	+
$(0, 1)$	$f'(1/2) = -3$	-
$(1, 2)$	$f'(3/2) = -3$	-
$(2, \infty)$	$f'(3) = 3/4$	+

Así, f crece en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, y decrece en $(0, 1)$ y $(1, 2)$. El cambio de signo de $+$ a $-$ en $x = 0$ da un máximo relativo $f(0) = 0$; el cambio de $-$ a $+$ en $x = 2$ da un mínimo relativo $f(2) = 4$.

Máximo relativo (0, 0), mínimo relativo (2, 4).

Opción B - Ejercicio 2

La integral es

$$I = \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}.$$

La sugerencia $t = \sqrt[4]{x}$ simplifica ambas raíces: $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$, $\sqrt{x} = t^2$ y $\sqrt[4]{x} = t$. Los límites pasan de $x = 1, 16$ a $t = 1, 2$, respectivamente. Por ello,

$$I = \int_1^2 \frac{4t^3}{t^2 + t} dt = 4 \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt.$$

Dividiendo t^2 entre $t + 1$, obtenemos $t^2/(t+1) = t - 1 + 1/(t+1)$. Entonces

$$I = 4 \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) \right]_1^2 = 4 \left(\ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{2} \right) = \boxed{2 + 4 \ln \left(\frac{3}{2} \right)}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Sean x, y, z los precios, en euros, de un lápiz, un rotulador y una carpeta, respectivamente. Las tres compras dan el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos primero el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det A = 3(4 \cdot 0 - 1 \cdot 7) - (2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + 2(2 \cdot 7 - 4 \cdot 1) = 0.$$

Un menor de orden dos no nulo es

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

así que $\text{rg}(A) = 2$. Además, la tercera fila de la matriz ampliada es $-F_1 + 2F_2$, pues

$$-(3, 1, 2 | 15) + 2(2, 4, 1 | 20) = (1, 7, 0 | 25).$$

Por ello, $\text{rg}(A^*) = 2$. Como ambos rangos coinciden y son menores que las tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado: existen infinitas listas de precios y no se pueden deducir valores únicos. Tomando $y = t$, las ecuaciones dan

$$x = 25 - 7t, \quad z = 10t - 30.$$

b) La condición adicional es $z = 10x$. Sustituyéndola en la primera y tercera ecuaciones:

$$23x + y = 15, \quad x + 7y = 25.$$

De la primera, $y = 15 - 23x$. Al sustituir en la segunda:

$$x + 7(15 - 23x) = 25 \implies -160x = -80 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Entonces $y = 15 - 23/2 = 7/2$ y $z = 10x = 5$. Comprobamos en la segunda compra: $2(1/2) + 4(7/2) + 5 = 20$. Por tanto,

lápiz 0,50 €, rotulador 3,50 €, carpeta 5 €.
--

Opción B - Ejercicio 4

a) Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales, son linealmente independientes. La dependencia de los tres vectores implica que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; escribimos

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha, 2\beta, \alpha + \beta) = (m, 1, n).$$

De la segunda coordenada, $\beta = 1/2$, así que $n = m + 1/2$. La ortogonalidad a $\vec{u} = (1, 0, 1)$ exige producto escalar nulo:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = m + n = 0.$$

Al combinar $n = m + 1/2$ y $n = -m$, obtenemos

$m = -\frac{1}{4}, \quad n = \frac{1}{4}.$
--

b) El volumen de un tetraedro generado por tres vectores es la sexta parte del valor absoluto de su determinante:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{|1 - 2m|}{6}.$$

Imponemos $V = 10$:

$$|1 - 2m| = 60 \implies 1 - 2m = 60 \text{ o } 1 - 2m = -60.$$

De aquí se obtienen los dos valores

$m = -\frac{59}{2} \text{ o } m = \frac{61}{2}.$
--