

Julio de 2017 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven las dos opciones. Las rectas se expresan en forma paramétrica y los planos en forma general.

Opción A

A.1. Relaciones entre matrices

Sean A y B matrices cuadradas de orden 3, con

$$A^2 = -A - I, \quad 2B^3 = B,$$

donde I es la matriz identidad de orden 3.

a) Invertibilidad de A y cálculo de A^3 . Reordenamos la primera igualdad:

$$A^2 + A = -I.$$

Factorizamos A por la izquierda:

$$A(A + I) = -I \implies A(-A - I) = I.$$

Como A es cuadrada y tiene inversa por la derecha, es invertible. La matriz que acompaña a A es su inversa:

$$\boxed{A^{-1} = -A - I.}$$

Para calcular A^3 , usamos la relación dada:

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= (-A - I)A \\ &= -A^2 - A \\ &= -(-A - I) - A \\ &= I. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{A^3 = I.}$$

b) Valores posibles de $\det B$. Definimos $d = \det B$. Tomamos determinantes en $2B^3 = B$. Como B es de orden 3, $\det(2B^3) = 2^3 \det(B^3)$:

$$\begin{aligned} 8d^3 &= d, \\ 8d^3 - d &= 0, \\ d(8d^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Así, $d = 0$ o $8d^2 = 1$. En el segundo caso:

$$d^2 = \frac{1}{8} \implies d = \pm \frac{1}{\sqrt{8}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Los valores posibles son

$$\boxed{\det B \in \left\{ 0, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right\}.}$$

c) Cálculo de $\det(B^2)$ cuando B es invertible. Como B tiene inversa, multiplicamos $2B^3 = B$ por B^{-1} a la derecha:

$$2B^3 B^{-1} = B B^{-1} \implies 2B^2 = I.$$

Tomamos determinantes en ambos lados. De nuevo, B^2 es de orden 3:

$$\det(2B^2) = \det I \implies 2^3 \det(B^2) = 1 \implies \boxed{\det(B^2) = \frac{1}{8}}.$$

A.2. Posición relativa de una recta y un plano con parámetros

La recta viene dada como intersección de los planos

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1, \\ x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Primero la pasamos a forma paramétrica. Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$(x + 3y - z) - (x - 2y - 2z) = 0 \implies 5y + z = 0 \implies z = -5y.$$

Al sustituir en la primera ecuación:

$$x - 2y - 2(-5y) = 1 \implies x + 8y = 1 \implies x = 1 - 8y.$$

Tomamos $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$. Así obtenemos el punto $P_0 = (1, 0, 0)$ y el vector director $\vec{d} = (-8, 1, -5)$:

$$r : \begin{cases} x = 1 - 8t, \\ y = t, \\ z = -5t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

El plano, escrito en forma general, es

$$\pi : 2x + y + mz - n = 0.$$

Sustituimos las coordenadas de r en el plano:

$$\begin{aligned} 2(1 - 8t) + t - 5mt - n &= 0, \\ 2 - n - 5(m + 3)t &= 0, \\ -5(m + 3)t &= n - 2. \end{aligned}$$

Esta ecuación determina cómo se cortan la recta y el plano.

a) **Valores para que se corten en un punto.** Si $m \neq -3$, el coeficiente de t no es cero y existe un único valor:

$$t = \frac{2 - n}{5(m + 3)}.$$

Por tanto, para cualquier $n \in \mathbb{R}$, la recta y el plano se cortan en un punto cuando

$$\boxed{m \neq -3, n \in \mathbb{R}}.$$

b) **Valores para que no se corten.** Si $m = -3$, la ecuación de intersección queda $0 = n - 2$. Cuando $n \neq 2$, es imposible, así que no hay punto común:

$$\boxed{m = -3, n \neq 2}.$$

c) **Valores para que r esté contenida en π .** Para que todos los puntos de la recta pertenezcan al plano, la igualdad debe cumplirse para cualquier t . Esto requiere que el coeficiente de t y el término constante sean ambos cero:

$$-5(m+3) = 0, \quad n-2 = 0.$$

Por tanto,

$$m = -3, \quad n = 2.$$

A.3. Función cúbica y áreas

Se considera

$$f(x) = x^3 - ax, \quad a > 0.$$

El dominio es $\mathbb{R}$, porque f es un polinomio y los polinomios están definidos para todo número real.

a) **Cortes con los ejes y crecimiento.** Para hallar los cortes con el eje x , ponemos $f(x) = 0$ y factorizamos:

$$x^3 - ax = 0 \implies x(x^2 - a) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x^2 = a.$$

Como $a > 0$, las raíces son $x = 0, \pm\sqrt{a}$. El corte con el eje y se obtiene poniendo $x = 0$, y es también el origen. Por tanto, los puntos de corte son

$$(-\sqrt{a}, 0), (0, 0), (\sqrt{a}, 0).$$

Derivamos para estudiar la monotonía:

$$f'(x) = 3x^2 - a.$$

Los puntos críticos satisfacen

$$3x^2 - a = 0 \implies x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Escribimos $c = \sqrt{a/3} > 0$. Probamos el signo de la derivada en cada intervalo:

Intervalo	Valor de prueba	Derivada en el valor de prueba	Signo y comportamiento
$(-\infty, -c)$	$-2c$	$3(2c)^2 - a = 3a$	$+$: creciente
$(-c, c)$	0	$-a$	$-$: decreciente
$(c, +\infty)$	$2c$	$3(2c)^2 - a = 3a$	$+$: creciente

En consecuencia, f crece en

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$$

y decrece en

$$\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right).$$

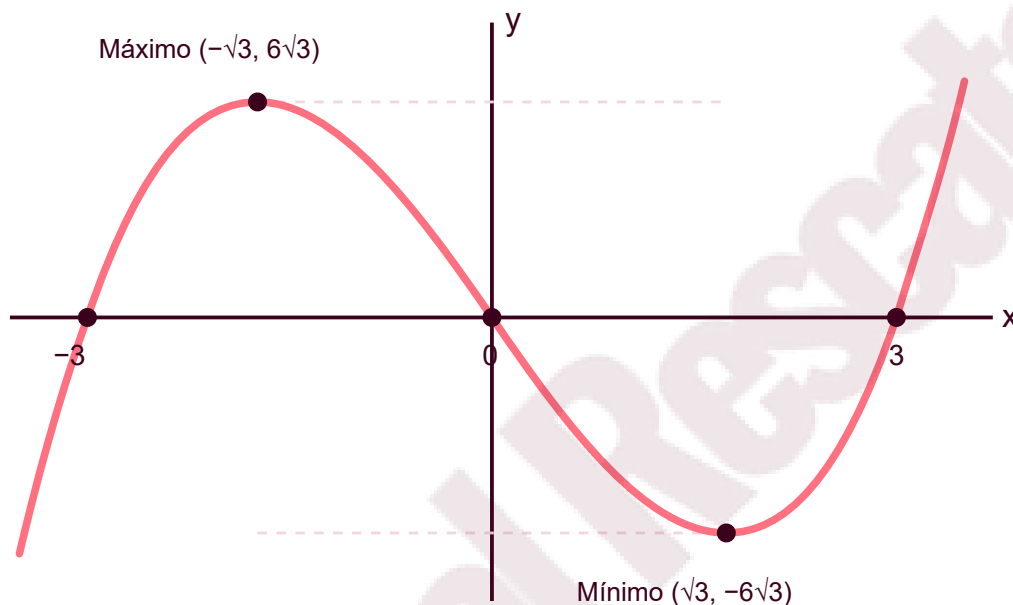
El signo cambia de $+$ a $-$ en $x = -c$, así que allí hay un máximo relativo. Su ordenada es

$$f(-c) = -c^3 + ac = c(a - c^2) = \frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}.$$

En $x = c$, el signo cambia de $-$ a $+$, así que hay un mínimo relativo, con valor opuesto. Los extremos son

$$\text{máximo: } \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}\right), \text{ mínimo: } \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, -\frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}\right).$$

b) Gráfica para $a = 9$. La función es $f(x) = x^3 - 9x$, cuyo dominio sigue siendo $\mathbb{R}$. Sus cortes con el eje x son $(-3, 0)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$. Del estudio anterior, $f'(x) = 3x^2 - 9$ se anula en $x = \pm\sqrt{3}$: hay un máximo en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ y un mínimo en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$. Además, al ser f impar, su gráfica es simétrica respecto al origen. Con estos puntos se traza la curva:



c) Área encerrada en el primer cuadrante si $a > 1$. Las intersecciones de $y = x^3$ e $y = ax$ satisfacen

$$x^3 = ax \implies x(x^2 - a) = 0.$$

En el primer cuadrante se encuentran en $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$. Para $0 < x < \sqrt{a}$, $ax - x^3 = x(a - x^2) > 0$, así que la recta está por encima de la curva. El área es la integral de la diferencia:

$$\int (ax - x^3) dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a) &= \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3) dx \\ &= \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ &= \boxed{\frac{a^2}{4}}. \end{aligned}$$

d) Valor de a para que las áreas coincidan. El área bajo $y = x^3$, entre $x = 0$ y $x = 2$, se calcula así:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

$$\mathcal{A}_2 = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4.$$

Igualemos esta área con la del apartado anterior:

$$\frac{a^2}{4} = 4 \implies a^2 = 16 \implies a = \pm 4.$$

Como en el apartado c) se exige $a > 1$, solo sirve $a = 4$:

$$\boxed{a = 4.}$$

Opción B

B.1. Matriz inversa y potencias

Se dan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Inversa de A .** Calculamos las potencias necesarias, multiplicando filas por columnas:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicamos ahora A^2 por A :

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comprobamos directamente que el producto de A^3 por A es la identidad:

$$\begin{aligned} A^3 A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Comprobación de que $A^4 = I$. Elevamos al cuadrado el resultado de A^2 :

$$\begin{aligned} A^4 &= A^2 A^2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{I}. \end{aligned}$$

c) Cálculo de A^7 , A^{30} , A^{100} . Como $A^4 = I$, las potencias se repiten cada cuatro exponentes. Dividimos cada exponente entre 4:

$$7 = 4 \cdot 1 + 3, \quad 30 = 4 \cdot 7 + 2, \quad 100 = 4 \cdot 25 + 0.$$

Así,

$$A^7 = (A^4)A^3 = IA^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{30} = (A^4)^7 A^2 = IA^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^{100} = (A^4)^{25} = I^{25} = \boxed{I}.$$

La matriz es cíclica de periodo 4: la primera potencia positiva que vuelve a la identidad es A^4 .

B.2. Posición relativa entre recta y plano

La recta está dada en forma simétrica por

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1},$$

y el plano es $2x - y + bz = 0$. Para discutir todos los valores de a , escribimos la recta en forma paramétrica tomando como parámetro el valor común t :

$$r : \begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = at, \\ z = 1 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esta forma paramétrica también permite estudiar $a = 0$: en ese caso $y = 0$, sin dividir por el parámetro a . El plano, en forma general, es

$$\pi : 2x - y + bz = 0.$$

a) Intersección cuando $a = -b = 1$. Esto significa $a = 1$ y $b = -1$. Sustituimos la recta en el plano:

$$\begin{aligned}2(1 + 4t) - t - (1 - t) &= 0, \\1 + 8t &= 0, \\t &= -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

El punto de corte se obtiene sustituyendo este valor en la recta:

$$Q = \left(1 + 4\left(-\frac{1}{8}\right), -\frac{1}{8}, 1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right).$$

b) Distancia cuando $a = b = 4$. En este caso la recta es

$$r : (x, y, z) = (1 + 4t, 4t, 1 - t).$$

Al sustituir en el plano $2x - y + 4z = 0$:

$$2(1 + 4t) - 4t + 4(1 - t) = 6.$$

La expresión vale **6** para todo t , no **0**. Por tanto, la recta es paralela al plano y no está contenida en él. Para hallar la distancia usamos un punto de la recta, por ejemplo $P_0 = (1, 0, 1)$, y la fórmula punto-plano:

$$d(r, \pi) = d(P_0, \pi) = \frac{|2(1) - 0 + 4(1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

c) Posición relativa para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$. Sustituimos la forma paramétrica de r en el plano:

$$\begin{aligned}2(1 + 4t) - at + b(1 - t) &= 0, \\2 + b + (8 - a - b)t &= 0.\end{aligned}$$

Distinguimos casos según el coeficiente de t :

- Si $8 - a - b \neq 0$, la ecuación tiene un único valor de t . La recta y el plano se cortan en un punto; equivalentemente, $a + b \neq 8$. - Si $8 - a - b = 0$, entonces $a + b = 8$. La ecuación queda $2 + b = 0$. Si $b = -2$, también $a = 10$, y la igualdad se cumple para todo t : la recta está contenida en el plano. - Si $a + b = 8$ pero $b \neq -2$, queda una igualdad imposible entre cero y un número distinto de cero: no se cortan y son paralelos.

En conclusión,

$a + b \neq 8$	: r corta a π en un punto,
$a + b = 8, b \neq -2$	: $r \parallel \pi$ y no se cortan,
$(a, b) = (10, -2)$	: $r \subset \pi$.

B.3. Área máxima de un triángulo

Los vértices son $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$, $y > 0$. El lado AB es horizontal y mide x ; por Pitágoras,

$$AB = x, OA = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La condición del enunciado es $OA + AB = 30$ metros:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 30.$$

Como la raíz es positiva, $30 - x > 0$. Despejamos y :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x &\implies x^2 + y^2 = (30 - x)^2 \\ &\implies y^2 = 900 - 60x \\ &\implies y = \sqrt{900 - 60x}.\end{aligned}$$

Además de $x > 0$, se necesita $900 - 60x > 0$, ya que $y > 0$. Por tanto, el dominio geométrico es

$$0 < x < 15.$$

La base del triángulo mide x y su altura mide y . Así, el área, en metros cuadrados, es

$$S(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{900 - 60x}, \quad 0 < x < 15.$$

Derivamos para buscar el máximo:

$$\begin{aligned}S'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{900 - 60x} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-60}{2\sqrt{900 - 60x}} \\ &= \frac{900 - 60x - 30x}{2\sqrt{900 - 60x}} = \frac{45(10 - x)}{\sqrt{900 - 60x}}.\end{aligned}$$

El denominador es positivo dentro del dominio. Igualamos a cero:

$$S'(x) = 0 \iff 45(10 - x) = 0 \iff x = 10.$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de S'	Comportamiento
$(0, 10)$	5	+, pues $S'(5) = 225/\sqrt{600} > 0$	Creciente
$(10, 15)$	12	-, pues $S'(12) = -90/\sqrt{180} < 0$	Decreciente

El área crece hasta $x = 10$ y decrece después. Además, tiende a 0 en los extremos del dominio, por lo que en $x = 10$ se alcanza el máximo absoluto:

$$x = 10 \text{ m.}$$

Calculamos el área máxima:

$$\begin{aligned}y(10) &= \sqrt{900 - 60 \cdot 10} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ m,} \\ S(10) &= \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = \boxed{50\sqrt{3} \text{ m}^2} \approx 86,60 \text{ m}^2.\end{aligned}$$