

Modelo · 2025

En cada apartado identificamos qué se pide, escribimos la regla que utilizaremos y después sustituimos los datos. Las probabilidades se expresan primero de forma exacta; cuando ayuda a interpretarlas, añadimos también su aproximación decimal.

Pregunta 1 · Probabilidad y estadística

Una finca dedica la mitad de su superficie a tomates, tres décimas a pimientos y dos décimas a calabacines. Dentro de cada cultivo se reparten los métodos de control indicados en el enunciado. Consideraremos como «libre» una planta que evita la plaga y como «con plaga» una que no la evita.

Árbol de probabilidad: todas las rutas

Para que se vea con claridad qué significa cada rama, lo representamos mediante tablas de rutas completas, sin líneas que atraviesen las etiquetas. Cada fila equivale a un recorrido del árbol: **cultivo** → **método** → **resultado**. Las dos últimas columnas muestran las ramas finales «libre» y «con plaga».

La regla del producto para una ruta es

$$P(\text{cultivo}, \text{método}, \text{resultado}) = P(\text{cultivo}) P(\text{método} \mid \text{cultivo}) P(\text{resultado} \mid \text{cultivo y método}).$$

Por ejemplo, para obtener un tomate tratado biológicamente y libre de plaga:

$$P(T \cap B \cap L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{17}{20} = \frac{17}{100}.$$

La probabilidad de la hoja «tomate, biológico, con plaga» se calcula igual, usando el complemento de la eficacia:
 $1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}.$

Tomates: $P(T) = \frac{1}{2}.$

En cada pareja, el primer valor corresponde a «libre» y el segundo a «con plaga».

Método	$P(\text{método} \mid T)$	Probabilidad condicional: libre; plaga	Probabilidad conjunta de la hoja: libre; plaga
Biológico	$\frac{2}{5}$	$\frac{17}{20}; \frac{3}{20}$	$\frac{17}{100}; \frac{3}{100}$
Químico	$\frac{3}{10}$	$\frac{19}{20}; \frac{1}{20}$	$\frac{57}{400}; \frac{3}{400}$
Orgánico	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}; \frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}; \frac{3}{100}$

Pimientos: $P(P) = \frac{3}{10}.$

Método	$P(\text{método} \mid P)$	Probabilidad condicional: libre; plaga	Probabilidad conjunta de la hoja: libre; plaga
Biológico	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}; \frac{1}{5}$	$\frac{9}{125}; \frac{9}{500}$
Químico	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}; \frac{1}{10}$	$\frac{27}{250}; \frac{3}{250}$
Orgánico	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}; \frac{1}{4}$	$\frac{27}{400}; \frac{9}{400}$

Calabacines: $P(C) = \frac{1}{5}.$

Método	$P(\text{método} \mid C)$	Probabilidad condicional: libre; plaga	Probabilidad conjunta de la hoja: libre; plaga
Biológico	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}; \frac{3}{10}$	$\frac{7}{250}; \frac{3}{250}$
Químico	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{20}; \frac{3}{20}$	$\frac{17}{200}; \frac{3}{200}$
Orgánico	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{20}; \frac{7}{20}$	$\frac{39}{1000}; \frac{21}{1000}$

1.1 Probabilidad de que una planta esté libre de plaga

Qué buscamos. La planta puede ser de cualquiera de los tres cultivos. Sumaremos la probabilidad de las hojas «libre» del árbol; equivalentemente, primero calculamos la eficacia media de cada cultivo y aplicamos la probabilidad total.

Para cada cultivo, sumamos las probabilidades de sus métodos multiplicadas por sus eficacias:

$$\begin{aligned}P(L \mid T) &= \frac{2}{5} \frac{17}{20} + \frac{3}{10} \frac{19}{20} + \frac{3}{10} \frac{4}{5} = \frac{173}{200}, \\P(L \mid P) &= \frac{3}{10} \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \frac{9}{10} + \frac{3}{10} \frac{3}{4} = \frac{33}{40}, \\P(L \mid C) &= \frac{1}{5} \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \frac{17}{20} + \frac{3}{10} \frac{13}{20} = \frac{19}{25}.\end{aligned}$$

La probabilidad total se obtiene ponderando cada resultado por la proporción de superficie de ese cultivo:

$$\begin{aligned}
 P(L) &= P(T)P(L | T) + P(P)P(L | P) + P(C)P(L | C) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{173}{200} + \frac{3}{10} \frac{33}{40} + \frac{1}{5} \frac{19}{25} \\
 &= \frac{173}{400} + \frac{99}{400} + \frac{19}{125} = \boxed{\frac{104}{125} = 0,832}.
 \end{aligned}$$

Conclusión: una planta elegida al azar tiene probabilidad **0,832**, es decir, un **83,2%**, de estar libre de plaga.

1.2 Probabilidad de que sea un pimiento sabiendo que está libre

Qué buscamos. Se conoce que la planta está libre, y preguntamos qué probabilidad hay de que proceda del cultivo de pimientos. Aplicamos Bayes:

$$P(P | L) = \frac{P(P \cap L)}{P(L)}.$$

La probabilidad conjunta de que sea pimiento y esté libre es

$$P(P \cap L) = P(P)P(L | P) = \frac{3}{10} \cdot \frac{33}{40} = \frac{99}{400}.$$

Sustituimos junto con el resultado del apartado anterior:

$$P(P | L) = \frac{99/400}{104/125} = \boxed{\frac{495}{1664} \approx 0,2975}.$$

Conclusión: entre las plantas libres de plaga, aproximadamente el **29,75%** son pimientos.

1.3 Al menos 3 de 11 tomates orgánicos sin plaga

Qué buscamos. Cada tomate tratado con el método orgánico evita la plaga con probabilidad $p = 0,80 = \frac{4}{5}$. Si los resultados se consideran independientes, el número X de tomates libres entre los 11 sigue una binomial:

$$X \sim \text{Bin}(n = 11, p = \frac{4}{5}), P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2).$$

La fórmula binomial es $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. Sustituimos y desarrollamos los tres casos que forman el complemento:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 3) &= 1 - \left[\binom{11}{0} \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^{11} + \binom{11}{1} \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^{10} + \binom{11}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^9 \right] \\
 &= 1 - \frac{37}{1953125} = \boxed{\frac{1953088}{1953125} \approx 0,999981056}.
 \end{aligned}$$

Conclusión: la probabilidad de que al menos tres tomates eviten la plaga es aproximadamente **99,9981%**.

Pregunta 2 · Álgebra

2.1 Discusión y resolución del sistema con parámetro

El sistema es

$$\begin{cases} x - y + az = -2, \\ -x + 2y - az = 3, \\ ax + y + z = 2. \end{cases}$$

Escribimos la matriz de coeficientes A y la ampliada A^* :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Como hay tres incógnitas, ambas matrices tienen rango como máximo 3. Primero localizamos los valores que pueden cambiar el rango calculando el determinante:

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \begin{vmatrix} 2 & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2+a) + (-1+a^2) + a(-1-2a) \\ &= 1-a^2 = -(a-1)(a+1).\end{aligned}$$

Caso 1: $a \neq -1$ y $a \neq 1$. El determinante no es cero, así que $\text{rg}(A) = 3$. La ampliada tiene como máximo rango 3 y contiene a A , luego también $\text{rg}(A^*) = 3$. Por Rouché-Frobenius, los rangos coinciden y valen el número de incógnitas: es un **sistema compatible determinado (SCD)**.

Calculamos su única solución por Cramer. Sustituir cada columna de coeficientes por los términos independientes da:

$$\Delta_x = -(a+1), \Delta_y = 1-a^2, \Delta_z = a+1.$$

Por tanto,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-(a+1)}{1-a^2} = \frac{1}{a-1}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{1}{a-1}.$$

Solución en este caso: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{a-1}, 1, -\frac{1}{a-1}\right)$, con $a \neq \pm 1$.

Caso 2: $a = -1$. El determinante vale cero, así que calculamos los rangos con menores. En A , el menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y columnas es

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A) \geq 2$. Como $\det A = 0$, su rango es exactamente 2. En la ampliada, la tercera fila es la opuesta de la primera, también en el término independiente; no puede aparecer un menor de orden 3 no nulo. Así, $\text{rg}(A^*) = 2$.

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, por Rouché-Frobenius es **compatible indeterminado (SCI)**: tendrá una variable libre. Tomamos $z = t$. Las dos primeras ecuaciones quedan

$$x - y - t = -2, -x + 2y + t = 3.$$

Al sumarlas obtenemos $y = 1$; al sustituir en la primera, $x = t - 1$. Por tanto,

$$(x, y, z) = (t - 1, 1, t), t \in \mathbb{R}.$$

Caso 3: $a = 1$. De nuevo $\det A = 0$. El mismo menor de orden 2 vale 1, de modo que $\text{rg}(A) = 2$. Para comprobar el rango de la ampliada, usamos el menor de orden 3 con las columnas de x, y y el término independiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Así $\text{rg}(A^*) = 3$. Como los rangos son distintos, Rouché-Frobenius indica que el sistema es **incompatible (SI)**: no tiene solución.

Resumen de la discusión: SCD si $a \neq \pm 1$; SCI si $a = -1$; SI si $a = 1$. Las soluciones de los dos casos compatibles se han calculado arriba.

2.2 Operaciones con matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = I_3.$$

2.2.1 Inversa y matriz B

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Desarrollamos por la primera fila:

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2(-2) = 5 \neq 0.$$

Luego existe A^{-1} . Los cofactores, traspuestos para formar la adjunta, dan

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A)$,

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos las potencias necesarias, sin saltarnos los productos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos por los coeficientes indicados:

$$-3A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -12 & -6 \\ 3 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sumamos primero $A^3 + (-3A^2)$ y después añadimos $5A$:

$$A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{5I_3}.$$

2.2.2 Cálculo de α y β

Partimos de $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$ y comparamos entradas iguales en ambos miembros. La entrada (1,1) y la entrada (1,2) proporcionan:

$$-\alpha + \beta + 1 = \frac{1}{5}, \quad 4\alpha + 2\beta = -\frac{2}{5}.$$

La primera ecuación equivale a $\beta - \alpha = -\frac{4}{5}$, y la segunda, al dividir entre 2, a $2\alpha + \beta = -\frac{1}{5}$. Restando la primera de la segunda:

$$3\alpha = \frac{3}{5} \implies \alpha = \frac{1}{5}, \quad \beta = \alpha - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Conclusión: $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = -\frac{3}{5}.$

Pregunta 3 · Geometría

3.1 Plano paralelo a dos rectas y distancias

Las rectas del enunciado son $r: y - z = 0, 2x + 2 = 0$ y $s: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z + 2$. Se pide el plano paralelo a ambas que pasa por el origen y las distancias de las rectas a ese plano.

Pasamos las dos rectas a **forma paramétrica**. Para r , ponemos $y = z = t$ y $x = -1$:

$$r: (x, y, z) = (-1, 0, 0) + t(0, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para s , igualamos sus razones a u :

$$s: (x, y, z) = (2, 0, -2) + u(-1, 3, 1), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Sus vectores directores son $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$ y $\vec{v}_s = (-1, 3, 1)$. Un vector normal al plano paralelo a ambas es su producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1).$$

Podemos usar el normal opuesto $(2, 1, -1)$. En forma general, el plano es $2x + y - z + D = 0$. Como pasa por $(0, 0, 0)$, $D = 0$:

$$\pi : 2x + y - z = 0.$$

La distancia de un punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ al plano general $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d(Q, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Como el plano es paralelo a las dos rectas, la distancia se mantiene constante al desplazarnos por cualquiera de ellas. Elegimos $Q_r = (-1, 0, 0) \in r$ y $Q_s = (2, 0, -2) \in s$:

$$d(r, \pi) = d(Q_r, \pi) = \frac{|2(-1) + 0 - 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$d(s, \pi) = d(Q_s, \pi) = \frac{|2(2) + 0 - (-2)|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

3.2 Posición de una recta respecto de un plano

La recta se da en forma continua $\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$. La pasamos a paramétrica igualando las razones a t :

$$r : (x, y, z) = (5, 1, 0) + t(1, 3, 4) = (5 + t, 1 + 3t, 4t), t \in \mathbb{R}.$$

El plano ya está en forma general: $\pi : ax + y - z = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Sustituimos las coordenadas de la recta en el plano:

$$a(5 + t) + (1 + 3t) - 4t = b \implies (a - 1)t = b - 5a - 1.$$

Un único punto de corte. Si $a - 1 \neq 0$, despejamos un único valor del parámetro:

$$t = \frac{b - 5a - 1}{a - 1}.$$

Por tanto, para todo $a \neq 1$ y cualquier b , hay un solo punto. Al sustituir ese parámetro en la recta:

$$P = \left(\frac{b - 6}{a - 1}, \frac{3b - 14a - 4}{a - 1}, \frac{4(b - 5a - 1)}{a - 1} \right), a \neq 1.$$

Recta contenida en el plano. Si $a = 1$, la ecuación queda $0 \cdot t = b - 6$. Para que todos los puntos de la recta pertenezcan al plano debe cumplirse $b - 6 = 0$; así, $a = 1, b = 6$.

Recta sin puntos de corte con el plano. Si $a = 1$ pero $b - 6 \neq 0$, la igualdad se convierte en $0 = b - 6$, imposible. Por tanto, no se cortan cuando $a = 1, b \neq 6$. En ese caso la recta es paralela al plano y no está contenida en él.

Pregunta 4 · Análisis

4.1 Intersección y área entre dos parábolas

Se dan $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, y el punto $P = (-1, 0)$.

Dominio y valor de b . Las dos funciones son polinómicas, por lo que sus dominios son $\mathbb{R}$. El punto debe pertenecer a ambas curvas. En f , $f(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$; en g :

$$g(-1) = (-1)^2 - b = 1 - b = 0 \implies b = 1.$$

En adelante, $g(x) = x^2 - 1$.

Asíntotas. No hay asíntotas verticales porque las funciones están definidas para todo real. Tampoco hay horizontales ni oblicuas: al ser polinomios cuadráticos, para f , $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, y para g , $g(x) \rightarrow +\infty$; ninguna se aproxima a una recta.

Crecimiento y extremos de f . Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = -2x + 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

La derivada es positiva si $x < \frac{1}{2}$ y negativa si $x > \frac{1}{2}$. Así, f crece antes de $\frac{1}{2}$, decrece después y tiene un máximo en

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}.$$

Intervalo/punto	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	+	0	-
Comportamiento	Creciente	Máximo $\frac{9}{4}$	Decreciente

Crecimiento y extremos de g .

$$g'(x) = 2x = 0 \implies x = 0.$$

Es negativa a la izquierda de 0 y positiva a su derecha; por ello g decrece, alcanza un mínimo $g(0) = -1$ y luego crece.

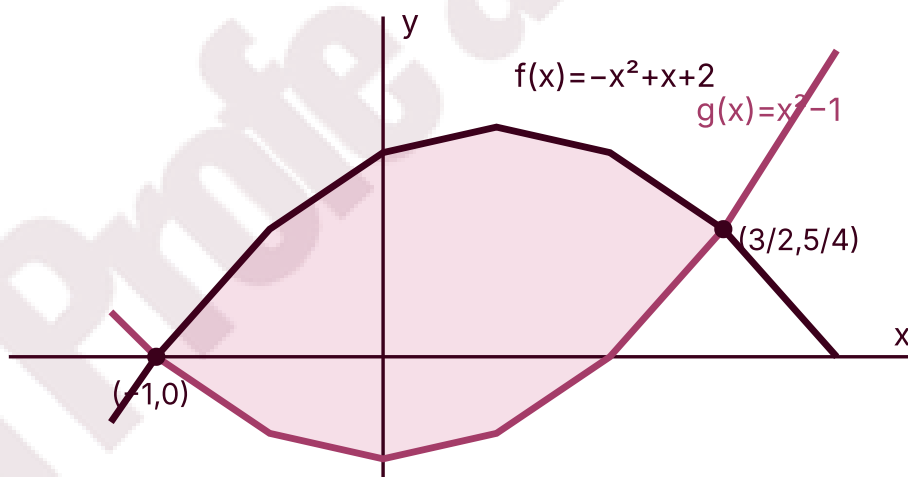
Intervalo/punto	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
Signo de $g'(x)$	-	0	+
Comportamiento	Decreciente	Mínimo -1	Creciente

Puntos de corte y región acotada. Igualamos las funciones:

$$-x^2 + x + 2 = x^2 - 1 \implies 2x^2 - x - 3 = 0 \implies (2x - 3)(x + 1) = 0.$$

Las abscisas son $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$. En ese intervalo $f - g = -2x^2 + x + 3$ es positiva (por ejemplo, en $x = 0$ vale 3), así que f queda por encima de g . El área se calcula integrando «función superior menos función inferior»:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{3/2} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^{3/2} (-2x^2 + x + 3) dx \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{3/2} \\ &= \left(-\frac{(3/2)^3 \cdot 2}{3} + \frac{(3/2)^2}{2} + \frac{9}{2} \right) - \left(-\frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 3 \right) \\ &= \frac{27}{8} - \left(-\frac{11}{6} \right) = \boxed{\frac{125}{24} \text{ u}^2}. \end{aligned}$$



Conclusión: el recinto limitado está entre $x = -1$ y $x = \frac{3}{2}$, con f arriba de g , y su área es $\frac{125}{24}$ unidades cuadradas.

4.2 Ventana Norman de perímetro 5 m

Sea x la base y diámetro del semicírculo, e y la altura del rectángulo. El radio es $r = \frac{x}{2}$. El perímetro exterior contiene la base, los dos lados verticales y el arco semicircular; el diámetro compartido entre rectángulo y semicírculo no cuenta porque queda en el interior.

Expresión del área. La longitud del arco es la mitad de la circunferencia completa: $\frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r = \frac{\pi x}{2}$. Por tanto, la condición de perímetro es

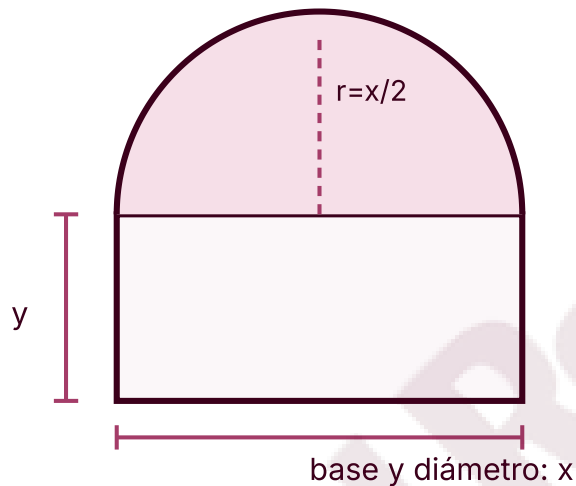
$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 5 \implies y = \frac{5 - x(1 + \pi/2)}{2}.$$

El área es la suma del rectángulo y el semicírculo:

$$\begin{aligned} S(x) &= xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= x \frac{5 - x(1 + \pi/2)}{2} + \frac{\pi x^2}{8} \\ &= \boxed{\frac{5x}{2} - \frac{4 + \pi}{8}x^2}. \end{aligned}$$

Como las dimensiones deben ser positivas, $x > 0$ y $y > 0$. De la fórmula de y :

$$5 - x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) > 0 \implies 0 < x < \frac{10}{2 + \pi} \text{ (metros)}.$$



Anchura que maximiza el área. La función S es un polinomio, así que su dominio algebraico es $\mathbb{R}$; en este problema solo son físicamente posibles los valores $0 < x < \frac{10}{2 + \pi}$. Al ser polinómica no tiene asíntotas. Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = \frac{5}{2} - \frac{4 + \pi}{4}x = 0 \implies x = \frac{10}{4 + \pi}.$$

Este valor está dentro del dominio físico. Para comprobar el cambio de crecimiento, probamos valores a ambos lados que también pertenecen al dominio: $S'(1) = \frac{6 - \pi}{4} > 0$ y $S'(\frac{3}{2}) = \frac{8 - 3\pi}{8} < 0$. Por tanto, el área crece antes del punto crítico y decrece después. Además, $S''(x) = -\frac{4 + \pi}{4} < 0$, lo que confirma que se trata de un máximo.

Intervalo/punto $(0, \frac{10}{4 + \pi})$ $\frac{10}{4 + \pi}$ $(\frac{10}{4 + \pi}, \frac{10}{2 + \pi})$

Signo de $S'(x)$ + 0 -

Comportamiento Creciente Máximo Decreciente

Sustituimos el valor exacto de x en la función del área:

$$\begin{aligned} S_{\max} &= S\left(\frac{10}{4 + \pi}\right) = \frac{5}{2} \frac{10}{4 + \pi} - \frac{4 + \pi}{8} \left(\frac{10}{4 + \pi}\right)^2 \\ &= \frac{25}{4 + \pi} - \frac{25}{2(4 + \pi)} = \boxed{\frac{25}{2(4 + \pi)} \text{ m}^2}. \end{aligned}$$

Conclusión: la ventana tiene área máxima cuando su anchura es $x = \frac{10}{4 + \pi} \approx 1,4002 \text{ m}$; dicha área es

$$\boxed{\frac{25}{2(4 + \pi)} \approx 1,7503 \text{ m}^2}.$$