

Se desarrollan las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio 1 · Optimización y sistema de ecuaciones

a) Sean x el número de sillas e y el de mesas. El tiempo disponible, la relación de fabricación y el máximo de unidades imponen

$$x + 4y \leq 24, \quad x \geq 2y, \quad x + y \leq 15, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio semanal es $B(x, y) = 40x + 100y$. Al ser lineal, basta evaluar esta función en los vértices de la región factible. Las intersecciones que cumplen todas las restricciones son $(0, 0)$, $(15, 0)$, $(12, 3)$ y $(8, 4)$; la intersección $x = 2y$ con $x + y = 15$ no es factible porque excede las 24 horas disponibles.

(x, y)	$(0, 0)$	$(15, 0)$	$(12, 3)$	$(8, 4)$
$B(x, y)$	0	600	780	720

12 sillas y 3 mesas; $B_{\max} = 780$ euros por semana.

b) Sean x, y, z las cantidades de sillas, mesas y estanterías. Las tres condiciones se traducen en

$$x + y + z = 100, \quad x = 4y, \quad 5y + z = 90.$$

Al sustituir $x = 4y$ en la primera ecuación se obtiene $5y + z = 100$, mientras que la tercera exige $5y + z = 90$. Las dos condiciones son incompatibles, así que no existe una fabricación que las satisfaga simultáneamente.

No es posible cumplir los tres requerimientos: exigirían $5y + z = 100$ y $5y + z = 90$.

Ejercicio 2 · Integral, continuidad, tangente y estudio de una función

Pregunta 2.1. La función es $f(x) = (x^2 - x - a)/2$. Para el apartado a) buscamos a imponiendo el valor de la integral definida. Una primitiva es

$$F(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{ax}{2}.$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_2^3 f(x) dx = F(3) - F(2) = \frac{23}{12} - \frac{a}{2} = \frac{5}{12},$$

de donde $a = 3$.

Para cualquier a , f es un polinomio dividido por la constante 2, así que es continua en todo $\mathbb{R}$. Si $a = 1$, entonces $f(2) = 1/2$ y $f'(x) = x - 1/2$, por lo que la pendiente en $x = 2$ es $3/2$. La recta tangente cumple la ecuación punto-pendiente:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x - 2), \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

Como $f(x)$ es de grado dos y el denominador $5x^3$ crece con mayor grado,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{5x^3} = 0.$$

$$a = 3; \quad f \text{ es continua en } \mathbb{R}; \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{5x^3} = 0.$$

Pregunta 2.2. El denominador se anula en $x = 1$, que queda excluido del dominio:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Como el numerador vale 1 en ese punto y $(x - 1)^2 \rightarrow 0^+$ por ambos lados, $x = 1$ es una asíntota vertical y $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$ o $x \rightarrow 1^+$. Para el comportamiento en el infinito, dividimos polinomios:

$$f(x) = x + 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}.$$

El último término tiende a cero en ambos infinitos; la asíntota oblicua es $y = x + 2$ y no hay horizontal. El signo de la derivada permite estudiar la monotonía. Derivando y simplificando,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

Los puntos que separan los intervalos son $x = 0$, $x = 1$ (excluido del dominio) y $x = 3$. El factor x^2 no cambia de signo en 0; así, $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y $(0, 1)$, $f'(x) < 0$ en $(1, 3)$ y $f'(x) > 0$ en $(3, +\infty)$. Por tanto, la función crece en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$. En $x = 0$ la derivada se anula, pero no cambia de signo, de modo que no hay máximo; en $x = 3$ pasa de negativa a positiva y hay un mínimo relativo, con $f(3) = 27/4$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad x = 1 \text{ vertical}; \quad y = x + 2 \text{ oblicua}; \quad \text{mínimo relativo } \left(3, \frac{27}{4}\right); \quad x = 0 \text{ no es máximo.}$$

Bloque B

Ejercicio 3 · Intervalos de confianza y probabilidad normal

Pregunta 3.1. Para una proporción conocida aproximadamente como $p = 0,9$, con $q = 1 - p = 0,1$, el margen de error de confianza 95% es

$$E = z_{0,975} \sqrt{\frac{pq}{n}}, \quad z_{0,975} = 1,96.$$

Queremos $E < 0,05$, así que

$$n > \frac{1,96^2(0,9)(0,1)}{0,05^2} = 138,2976.$$

El menor entero que cumple la desigualdad es $n = 139$.

En el apartado b), sea X el número de pastillas que superan el control. Entonces $X \sim \text{Bin}(140, 0,9)$, con media 126 y desviación típica $\sqrt{140(0,9)(0,1)} \approx 3,5496$. Como los dos recuentos esperados (126 y 14) permiten la aproximación normal, y «al menos 120» significa $X \geq 120$, aplicamos la corrección de continuidad:

$$P(X \geq 120) \approx P\left(Z \geq \frac{119,5 - 126}{3,5496}\right) = P(Z \geq -1,8312) \approx 0,9665.$$

$$n_{\min} = 139; \quad P(X \geq 120) \approx 0,9665.$$

Pregunta 3.2. La media muestral es $\bar{x} = 17500/140 = 125$ g. Como se conoce $\sigma = 30$ g, el intervalo de confianza bilateral para la media tiene la forma

$$\bar{x} \pm z_{0,995} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad z_{0,995} \approx 2,576.$$

Así, el error máximo es $2,576 \cdot 30/\sqrt{140} \approx 6,531$ g y

$$IC_{99\%}(\mu) = (125 - 6,531, 125 + 6,531) \approx (118,469, 131,531) \text{ g}.$$

Si la media poblacional fuese 100 g, la media de una muestra de 64 pastillas seguiría una normal de media 100 y desviación típica $30/\sqrt{64} = 3,75$. Por tanto,

$$P(\bar{X} > 110) = P\left(Z > \frac{110 - 100}{3,75}\right) = P(Z > 2,6667) \approx 0,0038.$$

$$IC_{99\%}(\mu) \approx (118,469, 131,531) \text{ g}; \quad P(\bar{X} > 110) \approx 0,0038.$$

Ejercicio 4 · Probabilidad y teorema de Bayes

Pregunta 4.1. Sean F el suceso «le gusta el fútbol» y V «le gusta el voleibol». De 400 estudiantes, 150 pertenecen a F , 200 a V y 100 a ambos.

$$P(F \cup V) = \frac{150 + 200 - 100}{400} = \frac{250}{400}.$$

Así, la probabilidad de que no le guste ninguno es $1 - P(F \cup V) = 150/400 = 0,375$. Los que prefieren exactamente uno son $150 - 100 = 50$ solo fútbol y $200 - 100 = 100$ solo voleibol; por tanto, su probabilidad es

$150/400 = 0,375$. Si sabemos que no le gusta el fútbol, hay $400 - 150 = 250$ estudiantes posibles, de los que 100 sí disfrutan del voleibol:

$$P(V | F^c) = \frac{P(V \cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{100/400}{250/400} = 0,4.$$

$$P(F^c \cap V^c) = 0,375; \quad P(\text{solo uno}) = 0,375; \quad P(V | F^c) = 0,4.$$

Pregunta 4.2. Sean M_1, M_2, M_3 los sucesos de residir en cada municipio y T el de comprar en Mitienda. Los municipios son incompatibles y cubren toda la población, de modo que sumamos los tres caminos para hallar $P(T)$:

$$P(T) = P(T | M_1)P(M_1) + P(T | M_2)P(M_2) + P(T | M_3)P(M_3) = 0,2(0,5) + 0,1(0,3) + 0,08(0,2) = 0,146.$$

Los casos «ser de M_2 y comprar» y «ser de M_3 y comprar» son incompatibles, por lo que sus probabilidades se suman. Aplicando Bayes,

$$P(M_2 \cup M_3 | T) = \frac{0,1(0,3) + 0,08(0,2)}{0,146} = \frac{0,046}{0,146} = \frac{23}{73} \approx 0,3151.$$

$$P(T) = 0,146; \quad P(M_2 \cup M_3 | T) = \frac{23}{73} \approx 0,3151.$$