Sistemas Lineares

Rafael Souza - Lumen Edu

October 11, 2024

1 Introdução

Sistemas lineares são conjuntos de equações que envolvem variáveis e suas combinações lineares. A solução de um sistema consiste em encontrar valores para as variáveis que satisfaçam todas as equações simultaneamente. Sistemas lineares aparecem em diversas áreas, como matemática, física, engenharia e economia, por serem capazes de modelar situações onde variáveis estão relacionadas de forma proporcional.

1.1 Número de Equações vs. Número de Variáveis

A relação entre o número de equações e o número de variáveis é um aspecto fundamental na resolução de sistemas. Essa relação nos ajuda a determinar a natureza do sistema e suas possíveis soluções:

- **Sistemas Determinados**: Quando o número de equações é igual ao número de variáveis. Se o sistema for consistente, esperamos encontrar uma solução única.
- **Sistemas Superdeterminados**: Quando há mais equações do que variáveis. O excesso de equações pode indicar um sistema com restrições demais, podendo não ter solução.
- **Sistemas Subdeterminados**: Quando há menos equações do que variáveis. Nesses casos, normalmente existem infinitas soluções, pois há uma "liberdade" para a escolha de valores.

1.2 Tipos de Sistemas Lineares

Com base na relação entre as equações, podemos classificar um sistema linear como:

- **Sistema Consistente e Determinado**: Possui uma única solução. Isso ocorre quando as equações representam planos, retas ou superfícies que se intersectam em um único ponto.

- **Sistema Consistente e Indeterminado**: Possui infinitas soluções. Normalmente ocorre quando as equações representam planos coincidentes ou retas paralelas e coincidentes.
- **Sistema Inconsistente**: Não possui solução. Isso acontece quando as equações representam planos ou retas paralelas que nunca se encontram.

1.3 Exemplo de Sistema Linear

Considere o seguinte sistema de três equações e três variáveis:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ -x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

Esse é um exemplo de sistema consistente e determinado, pois há uma solução única para as três variáveis x, y e z.

2 Métodos de Solução de Sistemas

Há diversos métodos para resolver sistemas lineares. Entre os métodos mais utilizados, os mais importantes são a substituição, eliminação (ou método da adição), e o uso de determinantes (Regra de Cramer).

2.1 Método da Substituição

O método da substituição consiste em isolar uma das variáveis em uma das equações e substituí-la em outras equações, até que reste apenas uma variável. Esse método é mais eficiente em sistemas com poucas equações e variáveis.

2.1.1 Exemplo Resolvido - Método da Substituição

Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Isolamos x na primeira equação:

$$x = 3 - y$$

Substituímos esse valor de x na segunda equação:

$$(3 - y) - y = 1 \Rightarrow 3 - 2y = 1 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

Substituímos $y = 1$ na primeira equação para encontrar x:

$$x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, a solução é $x = 2$ e $y = 1$.

2.2 Método da Eliminação (ou Adição)

O método da eliminação consiste em somar ou subtrair equações para eliminar uma das variáveis, repetindo o processo até encontrar a solução.

2.2.1 Exemplo Resolvido - Método da Eliminação

Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ -x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

Somamos a primeira e a segunda equação para eliminar y:

$$(x + y + z) + (2x - y + 3z) = 6 + 14 \Rightarrow 3x + 4z = 20$$

Repetimos o processo somando a segunda e a terceira para eliminar x:

$$(2x - y + 3z) + (-x + 4y - z) = 14 - 2 \Rightarrow x + 3y + 2z = 12$$

Agora resolvemos o sistema resultante:

$$\begin{cases} 3x + 4z = 20 \\ x + 3y + 2z = 12 \end{cases}$$

Isolamos x na primeira:

$$x = \frac{20 - 4z}{3}$$

E substituímos na segunda equação:

$$\frac{20 - 4z}{3} + 3y + 2z = 12$$

Resolvendo, encontramos z e y. Depois, substituímos para obter x.

3 Regra de Cramer

A regra de Cramer é um método algébrico para resolver sistemas lineares que usa determinantes. Para aplicá-la, precisamos que a matriz dos coeficientes do sistema seja quadrada e tenha determinante diferente de zero.

3.1 Passos para a Regra de Cramer

1. Representar o sistema na forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 2. Calcular o determinante da matriz A, $\det(A)$. 3. Para cada variável x_i, calcular o determinante da matriz A_i, substituindo a i-ésima coluna por $\mathbf{b}$. 4. A solução para cada variável é dada por:

$$k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

3.1.1 Exemplo Resolvido - Regra de Cramer

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

E o vetor dos termos independentes é:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\det(A)$:

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Resolvendo, encontramos $\det(A) = -12$.

Depois, substituímos $\mathbf{b}$ nas colunas correspondentes para calcular $\det(A_x)$, $\det(A_y)$, e $\det(A_z)$. Ou seja, para calcularmos o $\det(A_x)$, o determinante que vamos usar para resolver para x, devemos substituir b na coluna referente aos coeficientes de b. que nesse caso é a coluna com os coeficiente 2, 3 e 1. Finalmente, aplicamos a regra de Cramer para encontrar as variáveis x, y, e z, de forma que:
Calculando A_x:
Substituímos a primeira coluna de A pelo vetor $\mathbf{b}$:

$$A_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_x) = 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_x) = 5(1-4) - 1(-7-8) + 1(14+4)$$

$$\det(A_x) = 5(-3) - 1(-15) + 1(18) = -15 + 15 + 18 = 18$$

Calculando A_y:
Substituímos a segunda coluna de A pelo vetor $\mathbf{b}$:

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_y) = 2\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_y) = 2(-7-8) - 5(-3-2) + 1(12-7)$$

$$\det(A_y) = 2(-15) - 5(-5) + 1(5) = -30 + 25 + 5 = 0$$

Calculando A_z:
Substituímos a terceira coluna de A pelo vetor $\mathbf{b}$:

$$A_z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_z) = 2\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_z) = 2(-4-14) - 1(12-7) + 5(6+1)$$

$$\det(A_z) = 2(-18) - 1(5) + 5(7) = -36 - 5 + 35 = -6$$

Aplicando a Regra de Cramer
Agora, usamos os determinantes para encontrar as soluções:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{18}{6} = 3$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{0}{6} = 0$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-6}{6} = -1$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$x = 3, \quad y = 0, \quad z = -1$$

3.1.2 Considerações

Note que, com a Regra de Cramer, é possível calcular um variável sem calcular as outras. Isso pode ser muito útil para calcular uma variável em um sistema muito complicado no qual você não precisa das outras.

4 Conclusão

Sistemas lineares são amplamente aplicados em diversas áreas da matemática e ciências aplicadas. A escolha do método de resolução depende do tipo de sistema e de suas propriedades. Além dos métodos tradicionais, o uso de determinantes e da regra de Cramer oferece uma abordagem algébrica poderosa para resolver sistemas com múltiplas variáveis.

Alguns vestibulares ou provas podem abordar um estilo mais interpretativo, no qual você terá que interpretar um texto para montar as equações e resolvê-las (caso no qual as contas normalmente são mais simples). Outros vestibulares ou provas podem abordar sistemas de forma mais teórica, fornencendo um sistema ou algo que leve à ele e então perguntando sobre possíveis soluções, tipo de sistema, ou até inserindo constantes desconhecidas como coeficientes para que você determine as condições para a tipificação do sistema. Além disso, também existe o caso de sistemas muito grandes nos quais apenas é preciso uma variável, caso no qual a Regra de Cramer é uma ferramenta poderosa.

Independente do tipo de prova ou situação que você venha à enfrentar, espero que essa aula o tenho ajudado a entender melhor esse tema importante. Não esqueça de fazer as questões da lista de exercícios e, caso tenha dúvidas, não hesite em contatar os nossos mentores na plataforma do Discord.