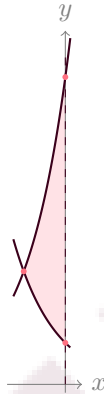


Se aplican integrales, derivadas, geometría analítica y operaciones con matrices.

Opción A - Ejercicio 1

Las curvas se cortan cuando $e^{x+2} = e^{-x}$, es decir, $2x + 2 = 0$ y $x = -1$. La región queda entre ambas curvas para $-1 \leq x \leq 0$, cerrada por la recta $x = 0$. En ese intervalo e^{x+2} es la curva superior; así,

$$S = \int_{-1}^0 (e^{x+2} - e^{-x}) dx = [e^{x+2} + e^{-x}]_{-1}^0 = \boxed{(e-1)^2}.$$



Opción A - Ejercicio 2

El tiempo de altura máxima se obtiene buscando cuándo la velocidad $h'(t)$ se anula. Derivamos y resolvemos:

$$h'(t) = -5 + 10e^{-2t} = 0 \implies e^{-2t} = \frac{1}{2} \implies t = \frac{\ln 2}{2}.$$

Además, $h''(t) = -20e^{-2t} < 0$, así que ese instante corresponde a un máximo. Sustituyendo:

$$h\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 5 - \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{5}{2} = \boxed{\frac{5}{2}(1 - \ln 2) \text{ m}}.$$

La velocidad a los dos segundos es

$$v(2) = h'(2) = -5 + 10e^{-4} = \boxed{\frac{10}{e^4} - 5 \text{ m/s}}.$$

Opción A - Ejercicio 3

El centro de la circunferencia pertenece a la recta $y = 2x$ y debe estar a la misma distancia de $A = (1, 6)$ y $B = (5, 2)$. La mediatriz de AB pasa por el punto medio $(3, 4)$ y tiene pendiente 1, porque AB tiene pendiente -1 ; su ecuación es $y = x + 1$. Intersectándola con $y = 2x$ se obtiene el centro $C = (1, 2)$. El radio es $|CA| = 4$, luego la circunferencia es

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16.$$

Opción A - Ejercicio 4

Para calcular $(A^t A^{-1})^2 A$ separamos las operaciones. Como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

primero multiplicamos:

$$A^t A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al elevar esta matriz al cuadrado y multiplicar después por A ,

$$(A^t A^{-1})^2 A = \begin{pmatrix} \frac{21}{4} & -\frac{5}{4} \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea x el lado paralelo al camino e y la profundidad. La valla del lado junto al camino cuesta $800x$ pesetas; la del lado opuesto cuesta $100x$, y los otros dos lados cuestan $200y$. La restricción presupuestaria es

$$900x + 200y = 288000, \quad y = 1440 - \frac{9}{2}x.$$

El área a maximizar es $A(x) = xy = 1440x - \frac{9}{2}x^2$, con $0 < x < 320$. Derivando:

$$A'(x) = 1440 - 9x = 0 \implies x = 160.$$

Como $A''(x) = -9 < 0$, se obtiene un máximo. Entonces $y = 720$ y el área máxima es $160 \cdot 720 = 115200$. Las dimensiones son

$$160 \text{ m} \times 720 \text{ m}, \quad A_{\max} = 115200 \text{ m}^2.$$

Opción B - Ejercicio 2

Las asíntotas verticales del gráfico están en $x = -3$ y $x = 1$, por lo que el denominador mónico debe ser

$$x^2 + bx + c = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3.$$

El gráfico señala además el punto de máximo de la rama central $(-1, -2)$. Al sustituirlo en $y = a/(x^2 + 2x - 3)$:

$$-2 = \frac{a}{1 - 2 - 3} = -\frac{a}{4},$$

de donde $a = 8$. Como comprobación, $f'(x) = -8(2x + 2)/(x^2 + 2x - 3)^2$ se anula en $x = -1$, donde la rama central alcanza ese máximo. Por tanto,

$$a = 8, \quad b = 2, \quad c = -3.$$

Opción B - Ejercicio 3

Sean $A = (3, 3, 5)$ y $B = (3, 3, 2)$. Como $ABCD$ es un rectángulo, los lados consecutivos AB y BC son perpendiculares. El punto C está en la recta

$$(x, y, z) = (t, 6 - t, 2t - 1).$$

Así, $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 0, -3)$ y

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (t - 3, 3 - t, 2t - 3).$$

La condición $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ da $-3(2t - 3) = 0$, luego $t = 3/2$ y

$$C = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 2\right).$$

En un rectángulo, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, por lo que

$$D = A + (C - B) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 5\right).$$

Opción B - Ejercicio 4

La matriz es

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $\det A_\lambda = -2\lambda(\lambda - 1)$. No tiene inversa cuando se anula:

$$\lambda = 0 \text{ o } \lambda = 1.$$

Para $\lambda = 1$, el sistema homogéneo es

$$x + 2y + z = 0, \quad x + y = 0, \quad y + z = 0.$$

De las dos últimas ecuaciones, $x = -y$ y $z = -y$. Tomando $y = -t$,

$$(x, y, z) = t(1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$