

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Sea x la mitad de la base y h la altura. Cada lado igual mide $\sqrt{x^2 + h^2}$, así que el perímetro fija la relación

$$2x + 2\sqrt{x^2 + h^2} = 8 \implies \sqrt{x^2 + h^2} = 4 - x.$$

Al elevar al cuadrado obtenemos $h^2 = 16 - 8x$. Para que el triángulo exista, $0 < x < 2$. Su área es $A(x) = xh = x\sqrt{16 - 8x}$; derivamos para localizar el máximo:

$$A'(x) = \frac{16 - 12x}{\sqrt{16 - 8x}}.$$

En el dominio, la derivada es positiva si $x < 4/3$ y negativa si $x > 4/3$, por lo que el máximo se alcanza en $x = 4/3$. En consecuencia,

$$\text{base} = 2x = \frac{8}{3}, \quad h = \sqrt{16 - 8 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

La longitud de cada lado igual es $4 - x = 8/3$, así que el triángulo óptimo es equilátero. Sus dimensiones pedidas son

base $\frac{8}{3}$,	altura $\frac{4}{\sqrt{3}}$.
----------------------	-------------------------------

Opción A - Ejercicio 2

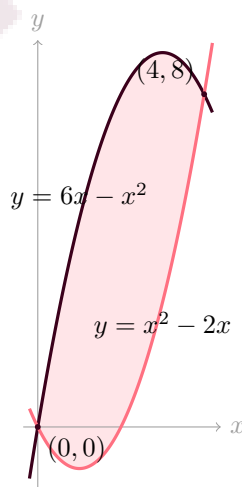
Los puntos de corte se obtienen igualando las funciones:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \iff 2x(4 - x) = 0.$$

Así, se cortan en $(0, 0)$ y $(4, 8)$. En $0 < x < 4$, f está por encima de g (por ejemplo, en $x = 2$), de modo que el recinto tiene como área

$$\mathcal{A} = \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx.$$

El esbozo muestra las dos parábolas y el recinto comprendido entre ellas:



Evaluando la integral,

$$\mathcal{A} = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = \boxed{\frac{64}{3}}.$$

Opción A - Ejercicio 3

El rango depende de cuándo se anula el determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2).$$

Si $\alpha \neq 1, -2$, el determinante es distinto de cero y $\text{rg}(A) = 3$. Para $\alpha = -2$, el determinante se anula pero el menor superior izquierdo de orden dos vale $3 \neq 0$, luego el rango es 2. Para $\alpha = 1$, las filas son $(1, 1, -1)$, $(1, 1, -1)$ y $(-1, -1, 1)$; todas son múltiplos de una fila no nula, así que el rango es 1:

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & \alpha \neq 1, -2, \\ 2, & \alpha = -2, \\ 1, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Para $\alpha = 2$, resolvemos $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema es

$$2x + y - z = 0, \quad x + 2y - z = 1, \quad -x - y + 2z = 1.$$

Restando la primera ecuación de la segunda, $y - x = 1$; al sustituir en la tercera resulta $z = x + 1$. La primera obliga entonces a $x = 0$, y por tanto

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Restamos las coordenadas para formar los tres vectores consecutivos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (k + 2, -k, -1), \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (-k, 2, -2), \quad \overrightarrow{CD} = D - C = (1, -2, 1).$$

Son linealmente dependientes si el determinante que forman es cero:

$$\det \begin{pmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -k^2 - 2k - 2 = -((k+1)^2 + 1) < 0.$$

No se anula para ningún $k \in \mathbb{R}$, así que no existe ningún valor para el que sean dependientes.

Para el volumen del tetraedro usamos tres vectores con origen en A . Además de $\overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 2 - k, -3), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (3, -k, -2).$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante de esos tres vectores:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} k+2 & -k & -1 \\ 2 & 2-k & -3 \\ 3 & -k & -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{k^2 + 2k + 2}{6}.$$

Al imponer $V = 1$ obtenemos $(k+1)^2 + 1 = 6$, y por tanto

$$k = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Para $x \neq 0$, la función es

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3} = 3x + \frac{1}{x^3},$$

por lo que su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

así que $x = 0$ es una asíntota vertical. En los infinitos,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Luego $y = 3x$ es una asíntota oblicua en ambos extremos. No hay asíntota horizontal, pues $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y a $-\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

Derivamos para estudiar la monotonía:

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^4} = \frac{3(x^4 - 1)}{x^4}.$$

El denominador es positivo en el dominio. La derivada es positiva si $|x| > 1$ y negativa si $0 < |x| < 1$. Teniendo en cuenta la discontinuidad en $x = 0$, f crece en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. En $x = -1$ pasa de creciente a decreciente, y en $x = 1$ de decreciente a creciente:

$$f(-1) = -4, \quad f(1) = 4.$$

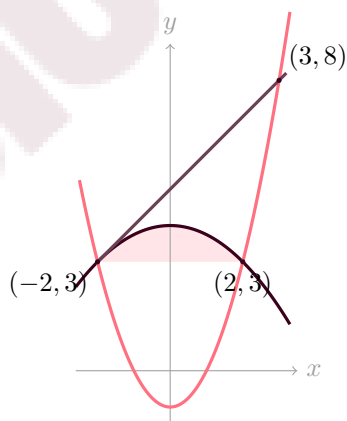
Por tanto, hay un máximo relativo en $(-1, -4)$ y un mínimo relativo en $(1, 4)$.

Opción B - Ejercicio 2

La tangente a $f(x) = -x^2/4 + 4$ en $x = -2$ tiene pendiente $f'(-2) = 1$ y pasa por $(-2, 3)$. Su ecuación es

$$y - 3 = x + 2 \implies y = x + 5.$$

Para el recinto, hallamos las intersecciones. Las parábolas se cortan cuando $-x^2/4 + 4 = x^2 - 1$, es decir, en $x = \pm 2$. La recta es tangente a f en $(-2, 3)$ y corta a g de nuevo en $(3, 8)$. El recinto limitado por las tres curvas queda entre la recta y f en $[-2, 2]$, y entre la recta y g en $[2, 3]$:



Calculamos el área por tramos, restando en cada uno la curva inferior de la recta:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-2}^2 \left((x+5) - \left(-\frac{x^2}{4} + 4 \right) \right) dx + \int_2^3 \left((x+5) - (x^2 - 1) \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \frac{(x+2)^2}{4} dx + \int_2^3 (-x^2 + x + 6) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_2^3 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{13}{6} = \boxed{\frac{15}{2}}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

Si $\alpha \neq 0$, la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{4\alpha} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Para que coincida con $\frac{1}{12}A$, comparamos, por ejemplo, la entrada superior derecha:

$$-\frac{1}{4\alpha} = \frac{1}{12} \implies \alpha = -3.$$

Este valor satisface también las otras entradas, por lo que

$$\boxed{\alpha = -3}.$$

Para este valor, $A^T = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación es $A^T X = B$. Como $\det(A^T) = -12 \neq 0$, multiplicamos por su inversa:

$$(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto fila por columna:

$$\begin{aligned} X = (A^T)^{-1}B &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} + 1 & -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{4} & \frac{3}{12} + 1 & \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{4} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 4

Parametrizamos la recta como intersección de los dos planos. De $3x - y = 5$ y $x + y - 4z = -13$ se obtiene $x - z = -2$. Tomando $z = t$:

$$r : \quad x = t - 2, \quad y = 3t - 11, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para hallar el corte con $\pi : x + 2y - z = 0$, sustituimos estas coordenadas:

$$(t - 2) + 2(3t - 11) - t = 6t - 24 = 0 \implies t = 4.$$

El punto de intersección es $\boxed{(2, 1, 4)}$.

El plano π tiene vector normal $\vec{n} = (1, 2, -1)$. La reflexión de Q respecto de π se obtiene haciendo que el pie de la perpendicular sea el punto medio entre Q y su simétrico. La proyección de $Q = (1, -2, 3)$ sobre el plano es

$$H = Q - \frac{\vec{n} \cdot Q}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = Q - \frac{-6}{6} \vec{n} = (2, 0, 2).$$

Por tanto, el punto simétrico es

$$Q' = 2H - Q = \boxed{(3, 2, 1)}.$$