

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide

- Demostrar que $C - A B^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
- Calcular la matriz X que verifica $C X = A B^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
- Justificar que $(A B^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n . (3 puntos)

Solución:

a) Cálculo de $C - A B^T$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - A B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de $C - A B^T$

$$|C - A B^T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \exists (C - A B^T)^{-1}$$

Calculemos la inversa de $C - A B^T$

$$C - A B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (C - A B^T)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } C - A B^T \text{ tiene inversa y es } \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

b) Matriz X ? / $C X = A B^T X + I$

$$C X = A B^T X + I \rightarrow C X - A B^T X = I \rightarrow (C - A B^T) X = I, \text{ por tanto } X = (C - A B^T)^{-1}$$

$$\text{Luego, } X = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

c) Justificar que $(A B^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n .

En el apartado a) hemos obtenido que $A B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 I \rightarrow (A B^T)^1 = 2^1 I$.

Calculemos $(A B^T)^2$

$$(A B^T)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 I \ 2 I = 4 I^2 = 2^2 I, \text{ se cumple para } n = 2.$$

Supongamos que se cumple $(A B^T)^n = 2^n I$, comprobemos que también se cumple para $n+1$.

$$(A B^T)^{n+1} = (A B^T)^n (A B^T) = 2^n I \ 2 I = 2^{n+1} I^2 = 2^{n+1} I, \text{ que es lo que queríamos comprobar.}$$

Por inducción hemos comprobado que: $(A B^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n .

Tu Prof te al Rescate

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

- El rango de la matriz A en función del parámetro real m . (4 puntos)
- La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
- El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8 . (2 puntos)

Solución:

a) ¿ $\text{ran}(A)$ en función de m ?

Estudiamos $|A|$,

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2(m-1) - 2m^2 = m^3 - 4m^3 + 4m^2 - 2m^2 = -3m^3 + 2m^2 = m^2(2-3m)$$

$$m^2(2-3m) = 0 \begin{cases} m^2 = 0 \rightarrow m = 0 \\ 2-3m = 0 \rightarrow 2 = 3m \rightarrow m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\text{Si } m \neq 0 \text{ y } \frac{2}{3} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

$$\text{Si } m = \frac{2}{3},$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3}-1 \\ -2\frac{2}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & 1 \\ 0 & 2\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sabemos que } |A| = 0 \\ \text{como } \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \frac{4}{9} = \frac{8}{27} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \end{array}$$

Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sabemos que } |A| = 0$$

Cualquier menor de orden 2 de esta matriz contiene una columna de ceros por lo que los menores de orden dos son nulos.

Como, por ejemplo, $|-1| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 1$

Finalmente,

$$\text{Si } m \neq 0 \text{ y } \frac{2}{3}, \text{ran}(A) = 3; \quad \text{si } m = \frac{2}{3}, \text{ran}(A) = 2 \quad \text{y} \quad \text{si } m = 0, \text{ran}(A) = 1$$

b) ¿ A^{-1} , para $m = 2$?

Como $2 \neq 0$ y $\frac{2}{3}$, por lo calculado en el apartado anterior, $|A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

$$\text{Si } m = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sabemos que } |A| = m^2(2-3m) \rightarrow |A|_{m=2} = [m^2(2-3m)]_{m=2} = 2^2(2-3 \cdot 2) = -16$$

Calculemos A^{-1} ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -16 \\ -4 & 2 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) ¿ m ? // $2A = -8$

$$/2A/ = \{\text{por se } A \text{ } 3 \times 3\} 2^3 /A/ = 8 /A/ \rightarrow 8 /A/ = -8 \rightarrow /A/ = -1$$

Como $|A| = m^2(2-3m)$ debemos resolver:

$$m^2(2-3m) = -1 \rightarrow 2m^2 - 3m^3 = -1 \rightarrow -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & -3 & -1 & -+ \\ \hline & -3 & -1 & -1 & [0] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Queda por resolver } -3m^2 - m - 1 = 0; \quad 3m^2 + m + 1 = 0 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{6} \quad \text{sin soluciones reales} \end{array}$$

La única solución es $m = 1$

Por tanto, $/2A/ = -8$ para $m = 1$.

Problema 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

- a) Indicar justificadamente la posición relativa de las rectas r y s . (5 puntos)
 b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s . (5 puntos)

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s ?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1, 2, 0) \\ \vec{v}_r(1, -3, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 4 - 5\mu \\ y = -3 + 4\mu \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} P_s(4, -3, 0) \\ \vec{v}_s(-5, 4, 1) \end{cases}$$

Estudiamos la matriz $\left[\begin{array}{cc|c} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{array} \right]$, es decir: $M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$

Rango de M , $\{M \text{ es } 3 \times 2, \text{ luego máximo rango de } M \text{ es } 2\}$

$$|I| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

Rango de M' , $\{M' \text{ es } 3 \times 3, \text{ luego máximo rango de } M' \text{ es } 3\}$.

El menor: $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -15 + 25 - 20 + 5 = -5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 3$

Como $\text{ran}(M) = 2$, las rectas no son paralelas y como $\text{ran}(M') = 3$, las rectas r y s se cruzan en el espacio.

b) ¿recta l ? l pasa por el origen y corta a las rectas r y s .

Construyamos los siguientes planos:

π : contiene a r y al origen y δ : contiene a s y al origen, por tanto l será la intersección de ellos.

Para obtener la ecuación de cada plano necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.

Plano π ,

$$r: \begin{cases} P_r(-1, 2, 0) \\ \vec{v}_r(1, -3, 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{punto } O(0,0,0) \\ \text{vectores } \begin{cases} \vec{v}_r(1, -3, 1) \\ \overrightarrow{OP_r}(-1, 2, 0) \end{cases} \end{cases} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2z - y - 3z - 2x = 0 \rightarrow -2x - y - z = 0 \rightarrow 2x + y + z = 0$$

Plano δ

$$s: \left\{ \begin{array}{l} P_s(4, -3, 0) \\ \vec{v}_s(-5, 4, 1) \\ O(0,0,0) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{punto } O(0,0,0) \\ \text{vectores } \left\langle \begin{array}{l} \vec{v}_s(-5, 4, 1) \\ \overrightarrow{OP_s}(4, -3, 0) \end{array} \right\rangle \end{array} \right. \rightarrow \delta: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 15z + 4y - 16z + 3x = 0 \rightarrow 3x + 4y - z = 0$$

Finalmente, la ecuación de la recta l es $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$.

Tu Profecia al Rescate

Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ y la recta

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

- Calcular la posición relativa de π_1 y π_2 . (3 puntos)
- Calcular el punto P' que es el simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1 . (4 puntos)
- Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r . (3 puntos)

Solución:

a) ¿Posición relativa de π_1 y π_2 ?

Obtenemos la ecuación general de π_2 .

$$\pi_2: \begin{cases} \text{punto } (-1, 1, 0) \\ \text{vectores } \begin{cases} \vec{u}(1, 1, 1) \\ \vec{v}(0, 1, -1) \end{cases} \end{cases} \rightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x+1) \cdot (-2) - (y-1) \cdot (-1) + z \cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$-2x - 2 + y - 1 + z = 0 \rightarrow -2x + y + z - 3 = 0 \rightarrow 2x - y - z + 3 = 0$$

Los planos son: $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$
 $\pi_2: 2x - y - z + 3 = 0$, como los coeficientes de x, y, z son proporcionales (iguales en este caso pero los términos independientes no proporcionales $\left(\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{4}{3}\right)$ los planos son paralelos no coincidentes.

Solución: π_1 y π_2 son planos son paralelos no coincidentes.

b) ¿ P' ? / P' es el simétrico de $P(1, 0, 0)$ respecto de π_1 ?

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$$

Calculemos la ecuación de una recta, s , que pasa por P y es perpendicular a π_1 .

$$s: \begin{cases} \text{punto } P(1, 0, 0) \\ \text{vector director } \vec{v}_s = \vec{n}_{\pi_1}(2, -1, -1) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Calculemos el punto M intersección de s y π_1 .

Sustituimos los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0$$

$$2 + 4\lambda + \lambda + \lambda + 4 = 0; \quad 6\lambda + 6 = 0; \quad 6\lambda = -6; \quad \lambda = -1$$

Sustituyendo este valor de λ en la ecuación de s obtendremos M .

$$\begin{cases} x = 1 + 2(-1) = -1 \\ y = -(-1) = 1 \\ z = -(-1) = 1 \end{cases} \rightarrow M(-1, 1, 1)$$

P' será el simétrico de P respecto de M ,

$$\frac{P+P'}{2} = M \rightarrow P' = 2M - P = 2(-1,1,1) - (1,0,0) = (-3,2,2)$$

Solución: el simétrico de P respecto de π_1 es $P'(-3, 2, 2)$.

c) $\pi_1 \cap r$?

Nos interesan las ecuaciones paramétricas de r .

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano, ($\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$)

$$2(1 + \lambda) - 2\lambda - (2 - \lambda) + 4 = 0; \quad 2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0; \quad \lambda + 4 = 0; \quad \lambda = -4$$

Sustituyendo este valor de λ en la ecuación de r obtendremos el punto buscado.

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda = 1 - 4 = -3 \\ y = 2\lambda = 2(-4) = -8 \\ z = 2 - (-4) = 6 \end{cases}$$

Por tanto, existe el punto de corte entre r y π_1 y es el punto $(-3, -8, 6)$.

Tu Profite al Rescate

Problema 5. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$. Obtener:

- El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- Las asíntotas de la función. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
- La integral de la función $f(x)$. (4 puntos)

Solución:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

Dom $f(x)$,

$$x^2 - 4 = 0; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Puntos de corte con

eje OY, $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 3}{0^2 - 4} = \frac{-3}{4} \rightarrow \left(0, \frac{-3}{4}\right)$

eje OX, $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 0; \quad x^2 + 3 = 0; \quad x^2 = -3$, sin solución. $f(x)$ no corta al eje OX.

El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ y sólo corta al eje OY en el punto $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$.

b) Asíntotas.

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^2 + 3}{(-2)^2 - 4} = \frac{7}{0} = \infty \rightarrow x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{2^2 + 3}{2^2 - 4} = \frac{7}{0} = \infty \rightarrow x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = 1 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

Oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$ y la asíntota horizontal es $y = 1$.

c) Monotonía y extremos.

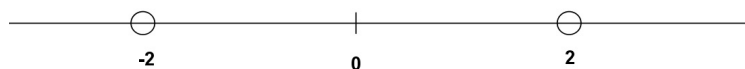
$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}, \quad f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 + 3)2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 6x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$. Obtengamos las raíces del numerador y denominador de $f'(x)$.

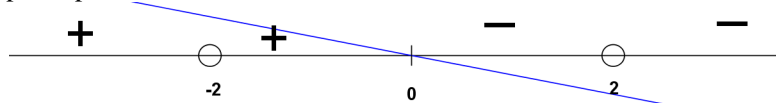
$$-14x = 0; \quad x = 0$$

$$(x^2 - 4)^2 = 0; \quad x^2 - 4 = 0; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Considerando el dominio de $f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos,



Como el denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que es un polinomio de primera grado (una línea recta) con coeficiente de x negativo que pasa por el 0:



Luego, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

El único extremo de la función está en $x = 0$ y como la función pasa de creciente a decreciente es un máximo relativo.

La función $f(x)$ sólo tiene un máximo relativo en $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$.

d) $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} dx$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 4 + 4 + 3}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} + \frac{7}{x^2 - 4} = 1 + \frac{7}{x^2 - 4}$$

Luego, $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} dx = \int \left(1 + \frac{7}{x^2 - 4}\right) dx = \int 1 dx + \int \frac{7}{x^2 - 4} dx = x + \int \frac{7}{x^2 - 4} dx$

La integral pendiente es una integral racional,

$$\frac{7}{x^2 - 4} = \frac{7}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \rightarrow 7 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$x = -2 \rightarrow 7 = A(-2+2) + B(-2-2) \rightarrow 7 = -4B \rightarrow B = \frac{-7}{4}$$

$$x = 2 \rightarrow 7 = A(2+2) + B(2-2) \rightarrow 7 = 4A \rightarrow A = \frac{7}{4}$$

Entonces,

$$\int \frac{7}{x^2 - 4} dx = \int \left(\frac{7/4}{x-2} + \frac{-7/4}{x+2} \right) dx = \int \frac{7/4}{x-2} dx + \int \frac{-7/4}{x+2} dx = \frac{7}{4} \ln|x-2| - \frac{7}{4} \ln|x+2|$$

Finalmente, $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} dx = x + \frac{7}{4} \ln|x-2| - \frac{7}{4} \ln|x+2| + C$

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

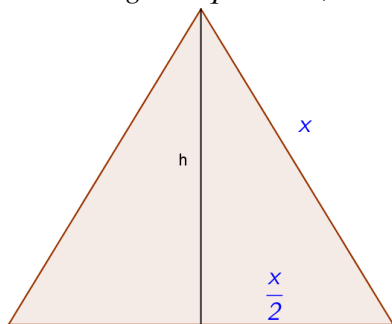
- Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
- Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

Solución:

Se divide un alambre de longitud 240 m en dos partes.

Con una de ellas se construye un triángulo equilátero de lado x [la longitud de esta parte será $3x$] y con la otra, de longitud $240 - 3x$, se construye un cuadrado [de lado $(240 - 3x)/4$]

a) Área del triángulo equilátero,



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 \rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4x^2 - x^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

(como h es una longitud, $h > 0$)

$$\text{Luego, } A_T = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{x^2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Área del cuadrado,

$$A_C = \left(\frac{240 - 3x}{4}\right)^2 = \frac{(240 - 3x)^2}{16}$$

La parte del cable usada para construir el cuadrado mide $240 - 3x$ que deber ser positivo, luego $240 - 3x > 0$; $240 > 3x$; $3x < 240$; $x < 80$. Luego $x \in [0, 80]$

Finalmente, la suma de las áreas en función de la longitud del lado del triángulo, x , es

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{(240 - 3x)^2}{16} \quad 0 \leq x \leq 80, x \text{ en metros.}$$

b) ¿ $x?$ / $S(x)$ sea mínima.

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2x + \frac{1}{16} \cdot 2(240 - 3x) \cdot (-3) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{8}(240 - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 90 + \frac{9}{8}x = \frac{4\sqrt{3}x + 9x}{8} - 90 =$$

$$= \frac{(4\sqrt{3} + 9)x}{8} - 90$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow \frac{(4\sqrt{3} + 9)x}{8} - 90 = 0 \rightarrow \frac{(4\sqrt{3} + 9)x}{8} = 90 \rightarrow (4\sqrt{3} + 9)x = 720$$

$$x = \frac{720}{4\sqrt{3} + 9} \cong 45.2028 \quad (\in [0, 80])$$

Como $S'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo, es una recta de pendiente positiva, entonces a la izquierda de su raíz es negativa y a la derecha positiva.

En $x = 45'2028$ hay un mínimo local y como $f(x)$ a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente, este mínimo local es el absoluto.

La función $S(x)$ alcanza su mínimo para $x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9}m \cong 45'2028 m$

Por tanto, **para que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima el lado del triángulo debe ser de $\frac{720}{4\sqrt{3}+9}m$ y la longitud del cable para construir el triángulo será de**

$3 \frac{720}{4\sqrt{3}+9}m \cong 135'6085 m$.

El área mínima será: $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{720}{4\sqrt{3}+9} \right)^2 + \frac{\left(240 - 3 \frac{720}{4\sqrt{3}+9} \right)^2}{16} \cong 1565'8710 m^2$

Tu Prof te al Rescate